



**KTO KARATAY
ÜNİVERSİTESİ**

**T.C.
KTO Karatay Üniversitesi
Fen Bilimler Enstitüsü**

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ TEZLİ YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

**BASİT MESNETLİ KİRİŞİN STATİK VE DİNAMİK ANALİZİ İÇİN
TRİGONOMETRİK SERİ ÇÖZÜMLERİ**

Kübra ERDEM

KONYA

TEMMUZ 2019

BASİT MESNETLİ KİRİŞİN STATİK VE DİNAMİK ANALİZİ İÇİN
TRİGONOMETRİK SERİ ÇÖZÜMLERİ

Kübra ERDEM

KTO Karatay Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
İnşaat Mühendisliği Ana Bilim Dalı Tezli Yüksek Lisans Programı

Yüksek Lisans Tezi

KONYA

Temmuz, 2019

Fen Bilimleri Enstitü Onayı



Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü
Prof. Dr. Hüseyin Bekir YILDIZ

Bu tezli yüksek lisans tezinin yapılması gereken bütün gerekliliklerinin yerine getirdiğini onaylıyorum.



Anabilim Dalı Başkanı
Doç. Dr. Atilla ÖZÜTOK

Kübra ERDEM tarafından hazırlanan BASİT MESNETLİ KİRİŞİN STATİK VE DİNAMİK ANALİZİ İÇİN TRİGONOMETRİK SERİ ÇÖZÜMLERİ başlıklı bu çalışma 05.07.20019 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak jüri tarafından tezli yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Atilla ÖZÜTOK



Jüri Üyeleri

Başkan: Prof. Dr. Mahmud Sami DÖNDÜREN

Üye : Doç. Dr. Atilla ÖZÜTOK (Danışman)

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Abdülkerim İLGÜN



TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını, kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı, bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu bildirir aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak ve kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

05.07.2019

KÜBRA ERDEM



ÖZET

BASİT MESNETLİ KİRİŞİN STATİK VE DİNAMİK ANALİZİ İÇİN TRİGONOMETRİK SERİ ÇÖZÜMLERİ

ERDEM, Kübra

İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı Yüksek Lisans Programı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Atilla ÖZÜTOK

Temmuz 2019

Bu çalışmada iki ucu basit mesnetli, düzgün yayılı yük etkisinde ve sabit kesit geometrisine sahip ortotropik Euler-Bernoulli ve Timoshenko kirişlerinin statik ve dinamik analizleri yapılmıştır. Enerji prensipleri kullanılarak her iki kiriş teorisine ait denge denklemleri, kinematik denklemler ve bünye bağıntıları elde edilmiştir. Elde edilen bu denklemler operatör forma dönüştürülmüş, Gâteaux diferansiyel metodu yardımı ile her iki kiriş teorisine ait dinamik ve geometrik sınır koşullarını içeren fonksiyoneller elde edilmiştir. Fonksiyonellerin çözümünde Ritz metodu kullanılmıştır. Ritz yönteminde problemin geometrik ve dinamik sınır koşullarını sağlayan trigonometrik şekil fonksiyonları seçilmiştir. Matrislerin çözümü bir bilgisayar programında yapılan kodlama ile yapılmıştır. Statik ve dinamik analizler için sayısal uygulamalar yapılarak sonuçları literatürde bulunan benzer çalışma sonuçları ile karşılaştırılmış ve sonuçların birbirine çok yakın çıktığı görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: kiriş, Ritz metodu, serbest titreşim, Gâteaux diferansiyel metodu, trigonometrik-seri çözümü.

ABSTRACT

TRIGONOMETRIC SERIES SOLUTIONS FOR STATIC AND DYNAMIC ANALYSIS OF SIMPLY SUPPORTED BEAM

ERDEM, Kübra

Department Of Civil Engineering

Supervisor: Doç. Dr. Atilla ÖZÜTOK

July 2019

In this study, static and dynamic analyzes of orthotropic Euler-Bernoulli and Timoshenko beams, which have a simple support at both ends, have a uniform distributed load effect and constant cross-sectional geometry, have been performed. Equilibrium equations, kinematic equations and structural relations of both beam theories were obtained by using energy principles. The obtained equations were transformed into operator form and functionalities including dynamic and geometric boundary conditions of both beam theories were obtained with the help of Gâteaux differential method. Ritz method was used in the solution of functionalities. In the Ritz method, trigonometric shape functions which provide geometric and dynamic boundary conditions of the problem were chosen. The solution of the matrices is done by coding in a computer program. Numerical applications were made for static and dynamic analyzes and the results were compared with the results of similar studies in the literature and the results were found to be very close to each other.

Key Words: beam, Ritz method, free vibration, Gâteaux differential method, trigonometric-series solution.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimime başlayışımın tez çalışmamı sonuçlandırana kadar her zaman destek olan, bilgi ve tecrübelerini esirgemeyen, başarıya ulaşmam için sürekli teşviklerde ve katkıda bulunan sayın hocam Doç. Dr. Atilla ÖZÜTOK'a ilgi ve anlayışı için en içten teşekkürlerimi sunarım. Eğitim hayatım boyunca desteklerini ve güler yüzlerini esirgemeyen tüm hocalarıma ve arkadaşlarıma ayrı ayrı teşekkür ederim.

Kübra ERDEM

Temmuz-2019



İÇİNDEKİLER

ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
İÇİNDEKİLER	v
ÇİZELGELERİN LİSTESİ	vi
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	vii
KISALTMALAR	viii
SEMBOL LİSTESİ	ix
1. GİRİŞ	1
2. LİTERATÜR ÖZETİ	7
3. MATERYAL VE YÖNTEM	13
3.1. Enerji Prensipleri ve Kiriş Teorileri	13
3.1.1. Varyasyonel Operatör	13
3.1.2. Euler-Lagrange Denklemi	15
3.1.3. Dinamik ve Geometrik Sınır Koşulları	17
3.1.4. Virtüel Yer Değiştirme İlkesi	18
3.1.5. Teori ve Formülasyon	19
3.1.6. Euler-Bernoulli Kiriş Teorisi	19
3.1.7. Timoshenko Kiriş Teorisi	22
3. 2. Ritz Yöntemi	27
3. 2. 1. Şekil Fonksiyonları için Trigonometrik Seriler	29
3. 3. Dinamik Analiz	32
4.ARAŞTIRMA SONUÇLARI	34
4.2.Dinamik Analiz	45
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	47
KAYNAKLAR	49
ÖZGEÇMİŞ	53

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 4.1. Basit mesnetli kalın EBT2 kirişlerinin maksimum çökmesi (w)	36
Çizelge 4.2. Basit mesnetli ince EBT2 kirişlerinin maksimum çökmesi (w)	37
Çizelge 4.3. Basit mesnetli EBT2 kirişlerinin maksimum moment değeri (M)	37
Çizelge 4.4. Basit mesnetli kalın TBT4 kirişlerin maksimum çökmesi (w)	41
Çizelge 4.5. Basit mesnetli ince TBT4 kirişlerinin maksimum yer çökmesi (w)	42
Çizelge 4.6. Basit mesnetli TBT4 kirişlerinin maksimum moment değeri (M)	43
Çizelge 4.7. Basit mesnetli TBT4 kirişlerinin maksimum kesme kuvveti değeri (Q)	44
Çizelge 4.8. Basit mesnetli kalın TBT4 kirişlerinin maksimum dönme değeri (ϕ)	44
Çizelge 4.9. Basit mesnetli ince TBT4 kirişlerinin maksimum dönme değeri (ϕ)	44
Çizelge 4.10. Basit mesnetli EBT2 ve TBT4 kirişleri serbest titreşim frekansları karşılaştırması (E=25; G=10; K=5/6; $\nu=0,25$; $\rho=1$; L/h =10)	45
Çizelge 4.11. Basit mesnetli EBT2 ve TBT4 kirişleri boyutsuz serbest titreşim frekansları karşılaştırması	46

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 1.1. Euler-Bernoulli kiriş modeli	2
Şekil 1.2. Timoshenko kiriş modeli	3
Şekil 4.1. İki ucu basit mesnetli kiriş modeli	34
Şekil 4.2. EBT2 kirişi maksimum çökme için karşılaştırmalı yaklaşım testi (L=12, h=1)	35
Şekil 4.3. EBT2 kirişi maksimum moment için karşılaştırmalı yaklaşım testi (L=12, h=1)	36
Şekil 4.4. EBT2 kirişi moment dağılım grafiği (L=12, h=1)	38
Şekil 4.5. TBT4 kirişi maksimum çökme için karşılaştırmalı yaklaşım testi (L=12 / h=1)	39
Şekil 4.6. TBT4 kirişi maksimum moment için karşılaştırmalı yaklaşım testi	39
Şekil 4.7. TBT4 kirişi maksimum kesme kuvveti için karşılaştırmalı yaklaşım testi	40
Şekil 4.8. TBT4 kirişi maksimum dönme değeri için karşılaştırmalı yaklaşım testi	41
Şekil 4.9. TBT4 kirişi L sabit iken ve h değeri artarken çökme değişim grafiği	42
Şekil 4.10. TBT4 kirişi moment dağılım grafiği (L=12, h=1)	43

KISALTMALAR

Kısaltmalar	Açıklama
EBT2	2 bilinmeyenli Euler-Bernoulli kiriş elemanı
TBT4	4 bilinmeyenli Timoshenko kiriş elemanı
SS	(Simply-Supported) İki ucu basit mesnetli kiriş

SEMBOL LİSTESİ

Simgeler	Açıklama
σ, ε	Gerilme ve şekil değiştirme tansörleri
E	Elastisite modülü
ν	Poisson oranı
h	Kiriş yüksekliği
b	Kiriş genişliği
L	Kiriş uzunluğu
$I(y)$	Fonksiyonel
Q	Operatör
$\langle \cdot \rangle, [\cdot]$	İç çarpım
u, v, w	Teğetsel ve normal yer değiştirmeler
$[k]$	Eleman matrisi
$[M]$	Kütle matrisi
ρ	Yoğunluk
φ	Şekil fonksiyonu
R, \hat{R} , M, \hat{M}	Dinamik sınır koşulları
$\Omega, \hat{\Omega}, u, \hat{u}$	Geometrik sınır koşulları
Q_x	Kesme kuvveti
γ	Kayma açısı
$\Omega_{x,y}$	Dönme açısı
q	Yayıllı yük
M_x	Eğilme momenti
A	Kesit alanı
$y(x_1), y(x_2)$	Sınır değerleri
$\eta(x_1), \eta(x_2)$	Sınır koşulu
$y(x), \eta(x)$	Fonksiyon
δU	İç kuvvetlerin virtüel işi
$\delta \varepsilon_{ij}$	Virtüel şekil değiştirme
δW	Dış kuvvetlerin virtüel işi
δy	Virtüel yer değiştirme
K	Düzeltilme faktörü
EI	Eğilme rijitliği
ω	Frekans parametreleri
w	Düşey doğrultuda yer değiştirme
G	Kayma modülü

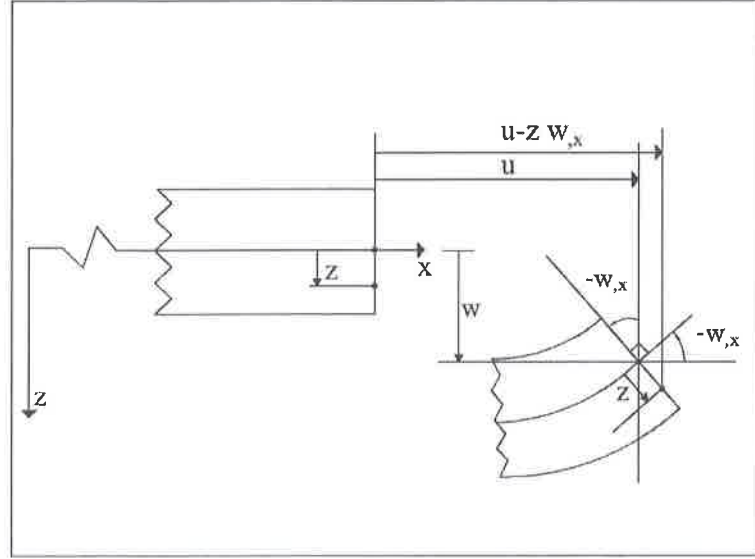
1. GİRİŞ

Mühendislikte taşıyıcı sistemlere ait çalışmaların başında çubuklar (kirişler) gelmektedir. Kirişler iki boyutu üçüncü boyutu yanında küçük olan çubuk eleman olarak da ifade edilebilen elemanlardır. Yapıda döşemeden gelen yükleri taşıyıp kolonlara aktaran elemanlardır. Bir çubuk elemanı tanımlanırken iki unsurdan bahsedilir. Bunlardan biri 'çubuk eksenini' diğeri ise 'çubuk enkesiti'dir. Eksenine dik yüklenmiş çubuklar eğilmeye çalışırlar. Literatür çalışması yapıldığında, kirişlerin değişik yükleme ve mesnet koşulları altında analizleri için bir takım teoriler ve sayısal çözüm yöntemleri geliştirilmiştir. Yapı analiz yöntemlerinin tümü denge ve uygunluk ifadelerinin temel diferansiyel denklemlerini çözmeye dayanır. Analitik çözümler yükün yayılı olması, kesit özelliklerinin ve sınır koşullarının matematiksel ifadelerle tanımlı olması durumlarıyla sınırlıdır.

Günümüzde birçok alanda olduğu gibi yapıların mekanik problemlerinin çözümü de hızla gelişen modern bilgisayar teknolojilerinden etkilenmektedir. Halen hızla gelişmekte olan kapasiteli ve hızlı bilgisayarlar ile daha karmaşık ve zaman gerektiren problemlere çözüm üretilmesi sağlanmaktadır. Bilgisayar teknolojilerindeki gelişmeler sayısal çözüm yöntemlerinin daha işler hale getirilmesini sağlamıştır.

Geometrik özellikleri ve buna bağlı olarak uygulanan yüklerin etkilerine göre kirişlerin analizi için iki önemli varsayım vardır. Bunlar; Euler-Bernoulli Kiriş Teorisi (Classical Lamina Beam Theory) ve Timoshenko Kiriş Teorisi (First-Order Shear Deformation Theory) dir. Kaynak araştırması yapıldığında birçok araştırmacının bu teorilere ait çalışmaları görülmektedir (Heyliger ve Reddy 1988, Aköz ve Kadioğlu 1999, Cowper 1966, Armenákas 1969, Omurtag 2001, Zhou 2000, Aydoğdu 2005, Gürlek 2018).

Uygulamada en çok kullanılan kiriş teorisi basitliği nedeni ile Euler-Bernoulli kiriş teorisi'dir. Bu teori gereği Şekil 1.1.'deki gibi çubukta kesme etkisi ihmal edildiğinden, şekil değiştirmeden önce çubuk eksenine dik olan enkesitin şekil değişiminden sonra da dik kaldığı varsayılır.

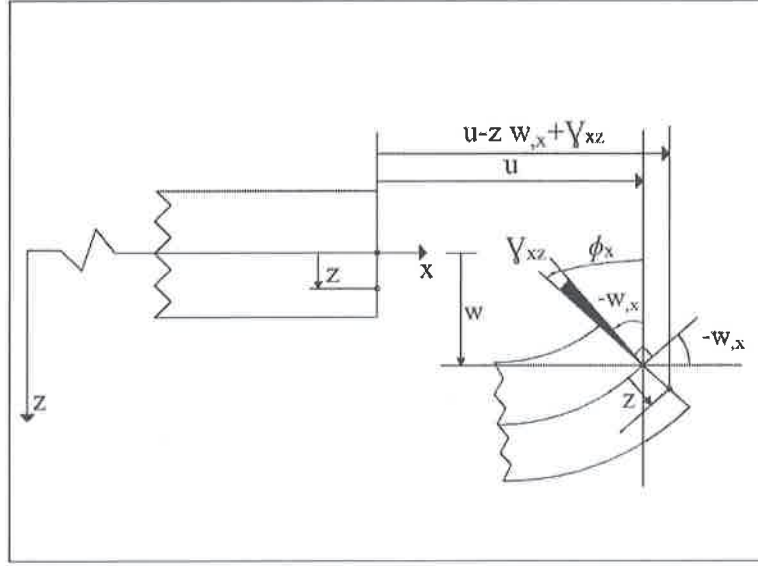


Şekil 1.1. Euler-Bernoulli kiriş modeli

Timoshenko kiriş teorisinde kiriş kalınlığındaki artışa bağlı olarak eğilmenin yanında kayma etkileri de dikkate alınmıştır. Şekil 1.2.'de görüldüğü gibi, şekil değiştirmeden önce çubuk eksenine dik olan kesit şekil değişiminden sonra rijit bir levha gibi döner ama kaymanın etkisiyle artık çubuk eksenine dik kalmaz, çubuk eksenine ile bir açı yapar. Bu hali ile Timoshenko kiriş teorisi Euler-Bernoulli kiriş teorisinden daha gelişmiş ve bir anlamda onun iyileştirilmiş halidir.

1980'li yıllardan itibaren bazı araştırmacılar gerçek gerilme durumu ile varsayılan gerilme durumu arasındaki tutarsızlıkları ortadan kaldırmak amacıyla daha yüksek mertebeden kayma şekil değiştirme teorileri geliştirmişlerdir (Reddy 1984, Aydoğdu 2009). Bu yüksek mertebeli teoriler kullanılarak kompozit plak ve kirişlerin analizlerinde daha gerçekçi sonuçlara ulaşılmıştır.

Taşıyıcı sistemin geometrisine, yükleme durumuna ve sınır koşullarına bağlı olarak yapı mekaniğinde kesin çözümü bilinen problem sayısı oldukça sınırlıdır. O nedenle pek çok durumda yaklaşık çözümlere yönelmek bir zorunluluktur. Bu noktada enerji yöntemi ile değişim ilkelerinin birlikte kullanılması mühendislik uygulamalarına önemli açılımlar sunar. Yaklaşık çözüm kesin sonuca ne kadar yaklaşırsa, enerji de durağan değerine o kadar yaklaşır (Omurtag, 2012).



Şekil 1.2. Timoshenko kiriş modeli

Geçmişten günümüze kadar olan çalışmalar incelendiğinde en çok kullanılan yaklaşık çözüm yöntemlerinden bazıları; Ritz metodu, sonlu elemanlar metodu, Galerkin metodu, en küçük kareler metodu, sonlu farklar metodu ve sınır elemanlar metodudur. Ritz metodu ve sonlu elemanlar metodunda, önce diferansiyel denkleme karşı gelen $I(y)$ fonksiyonelinin bulunması gerekmektedir. Galerkin metodu, en küçük kareler metodu ve son zamanlarda yaygın olarak kullanılmaya başlanan sınır elemanlar metodunda ise fonksiyonele gereksinim duyulmadan çözüm bulunabilir (Aköz, 1985).

Ritz yöntemi; ilk kez 1877 yılında Lord Rayleigh (John William Stuart) tarafından ortaya atılmış olup, Walther Ritz tarafından 1909 yılında geliştirilmiştir. Yapı mekaniğinde yer değiştirme, titreşim, burkulma, doğrusal olmayan davranış hesabı için geliştirilmiş önemli varyasyonel çözüm yöntemlerinden biridir (Omurtag, 2012). Ritz yöntemi integral formülasyonu kullanılarak sınır değer problemlerine yaklaşık bir çözüm vermektedir. Bu enerji formülasyonu bilinen fonksiyonlar ve bilinmeyen katsayıları içeren serileri içerir. İntegral formülasyon ile belirsiz katsayılar cinsinden bir dizi cebirsel denklemler sistemi elde edilmektedir. Tam sonucu almak için genellikle sonlu bir seriye ihtiyaç vardır. Bu sonlu seri normalde yaklaşık çözümü

vermektedir. Bu sebeple yeterli sayıda terim alınarak tam sonuca oldukça hassas yaklaşılabilmektedir.

Sonlu elemanlar yönteminde Ritz yönteminde olduğu gibi yaklaşık bir fonksiyon seçilir. Yöntemler arasındaki temel fark, sonlu elemanlar yönteminde, varsayılan yaklaşık fonksiyonların tüm çözüm alanı üzerinde tanımlanmaması ve herhangi bir sınır koşulunu başta yerine getirmelerine ihtiyaç duymamasıdır. Yaklaşık fonksiyonların tüm çözüm alanı boyunca tanımlanması gerektiğinden, araştırmacılar Ritz yönteminin yalnızca basit geometrik şekildeki alanlar için kullanılabileceğini söylemişlerdir. Benzer geometrik kısıtlamalar sonlu elemanlar yönteminde de bulunur, ancak bu kısıtlama, yalnız bölge içindeki eleman içindir. Basit geometrik şekle sahip elemanların, karmaşık alanlara yaklaşması için bir araya getirilmesi gerektiğinden, araştırmacılar sonlu elemanlar yönteminin Ritz metodundan daha çok yönlü bir teknik olduğunu ifade etmişlerdir. Sonlu elemanlar yönteminin tek sınırlaması, deneme fonksiyonlarının yakınsama (süreklilik ve tamlık) koşullarını yerine getirmesi gerektiğidir. Bu yöntemde önce çözümü aranan bölge sonlu sayıda alt bölgelere ayrılmaktadır. Bu alt bölgelerin birbirleriyle etkileşimleri, düğüm noktası denilen bağlantı noktaları ile sağlanır. Ritz yönteminden farklı olarak yaklaşık fonksiyon, çözümü aranan bölgedeki bir eleman için geçerlidir. Bilinmeyenleri çözmek için gerekli olan eleman denklemleri varyasyon (değişim) yöntemleri ile elde edilir. Eleman alt bölgelere ayrılıp boyutu küçültüldüğünden yaklaşık çözümün gerçek değere yaklaşabilmesi için seçilen fonksiyonun süreklilik ve tamlık şartlarını sağlaması gerekir. Sonlu elemanlar yönteminin avantajlarından biri sınır şartlarının problemin çözüm sırasına göre en son adımda hesaplara dahil edilmesidir. Böylece sınır şartlarını probleme uygularken baştan yoğun hesaplara girilmez.

Galerkin yönteminde dinamik sınır koşullarını sağlayacak şekilde seçilen çözüm fonksiyonları yaklaşık çözümde kullanılmaktadır. Yöntem Ritz metoduna göre üstün olmakla birlikte, dinamik koşulların sağlatılmış olması, fonksiyonların seçiminde zorluk yaratmaktadır.

Sınır koşullarının karışıklığı nedeni ile diferansiyel denklemi çözmek her zaman mümkün olmadığından çözümde güçlüklerle karşılaşıldığında yaklaşık çözümlere başvurulmaktadır. Diferansiyel denklem verildiğinde buna karşı gelen fonksiyonel

farklı yöntemlerle üretilebilmektedir. Bu yöntemler; potansiyel enerji teoremleri, Hu-Washizu ve Hellinger-Reissner teorileri, varyasyonel formülasyon, ağırlık formülasyonu ve Gâteaux türevi olarak sıralanabilir. Son yıllarda Aköz ve arkadaşları, çeşitli problemlerin statik ve dinamik analizleri için Gâteaux diferansiyel yöntemini başarıyla uygulamışlar ve fonksiyoneller üretmişlerdir (Aköz ve ark. 1991, Aköz ve Özütok 2000, Aköz ve Eratlı (1992, 1997), Omurtag ve ark. 1997). Gâteaux diferansiyel yönteminin bazı avantajları vardır (Özütok, 1999). Bunlar;

- Herhangi bir bünye denklemi bu formülasyonda kullanılabilir. Son zamanlarda bu yaklaşım viskoelastik kirişler için kullanılmıştır.
- Bir tek eleman kullanarak sürekli kirişler için doğru sonuç elde edilebilir.
- Gâteaux yaklaşımı ile rijitlik matrisinin tersine gerek olmaksızın elemanların formülasyonu açık olarak yazılabilir.
- Verilen alan denklemlerinden, fonksiyonel ve sınır koşulları çok kolaylıkla elde edilebilir.
- İnce ve kalın plak ve kabukların iç kuvvet, moment, dönme, yerdeğiştirme ve frekansları ω hesaplanabilir.
- Alan denklemleri ve sınır koşulları sağlam olarak fonksiyonele yansıtılır.
- Alan denklemlerinin uyumluluğu kontrol edilmiş olur.

Bu çalışmada Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş teorilerine dayalı kirişlerin statik ve dinamik analizleri Ritz yöntemi ile incelenmiştir. Çalışmada sabit kesit geometrisine sahip, üniform yayılı yük etkisi altındaki basit mesnetli kirişler ele alınmıştır. Euler-Bernoulli kiriş teorisi için eğilme momenti ve çökmenin bilinmeyen olarak tanımlandığı EBT2, Timoshenko kiriş teorisi için eğilme momenti, çökme, kesme kuvveti ve dönmenin bilinmeyen olarak tanımlandığı TBT4 kiriş elemanları elde edilmiştir. Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş teorilerine ait alan denklemleri enerji prensiplerinden virtüel yer değiştirme ilkesi kullanılarak elde edilmiştir. Varyasyonel işlemler yapılarak dinamik ve geometrik sınır koşulları belirlenmiş, ardından bu sınır koşullarını içeren alan denklemleri,

$$\mathbf{Q} = \mathbf{L} \mathbf{y} - \mathbf{f} \quad (1.1)$$

biçiminde operatör forma dönüştürülmüştür. Bu operatör forma Gâteaux türevi uygulanarak, süreklilik ve potansiyellik kontrolleri yapılmış Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş teorilerine ait fonksiyoneller elde edilmiştir. Alan denklemleri ve sınır koşulları sağlam olarak elde edilen bu fonksiyonellere yansıtılırken Aköz (1985, 1991, 1996, 2000) tarafından yayınlanan kaynaklardan yararlanılmıştır. Bu fonksiyoneller yalnız birinci mertbe türevler içermektedirler. Elde edilen fonksiyoneller Ritz yöntemi kullanılarak çözülmüştür. Ritz yöntemi uygulanırken fonksiyonelde bilinmeyen ve çözümde doğrudan elde edilecek olan eğilme momenti, yer değiştirme, kesme kuvveti, dönme ifadeleri problemin geometrik ve dinamik sınır koşullarını sağlayan trigonometrik şekil fonksiyonları kullanılmıştır. Elde edilen sistem matrislerinin çözümü bir bilgisayar programında geliştirilen kodlama ile yapılmıştır.

2. LİTERATÜR ÖZETİ

Son yıllarda bilgisayar teknolojisi ve yazılımlardaki gelişmelerle birlikte birçok bilim dalında olduğu gibi yapı mühendisliği alanında da araştırma ve geliştirme çalışmaları artmıştır. Farklı yapı elemanlarının çeşitli koşullar altında statik, dinamik ve diğer çeşitli analizlerinde değişik yaklaşım yöntemleri kullanılmış ve çalışmalarda daha hassas sonuçlar elde edilmiştir. Ritz yöntemi, sonlu elemanlar yöntemi, sonlu farklar yöntemi, Galerkin yöntemi, en küçük kareler yöntemi ve sınır elemanlar yöntemi çalışmalarda en çok kullanılan yaklaşık yöntemler arasındadır. Birçok araştırmacı çalışmalarında Ritz yöntemini kullanmışlardır. Gâteaux diferansiyel metodu gibi çeşitli yöntemler ile elde ettikleri fonksiyonların çözümünde çeşitli trigonometrik seriler, polinom dizileri kullanmışlardır. Araştırmacılar analizlerde Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş teorilerini de kullanmışlardır. Ritz yöntemi ya da diğer yöntemler kullanılarak çubuk elemanlar için yapılan çalışmaların bir kısmı şunlardır; Trung-Kien Nyugen ve arkadaşları (2016) kompozit kirişlerin statik, burulma ve titreşim analizi için yüksek mertebeden kiriş teorisine dayanan yeni bir trigonometrik seri çözümü geliştirmişlerdir. Çalışma aksenal yer değiştirmenin daha yüksek dereceli varyasyonunu açıklayan bir teoriye dayanmaktadır. Lagrange denklemlerini kullanarak hareket denklemleri türetmişlerdir. Değişik sınır koşulları altındaki kirişler için yeni trigonometrik seri ile Ritz tipi analitik çözüm geliştirmişlerdir. Önerdikleri çözümün doğruluğunu göstermek için yakınsama ve doğrulama çalışmaları yürütmüşler, nümerik sonuçlar sunmuşlardır.

Ngoc-Duong Nguyen ve ark., (2018) çalışmalarında termal ve mekanik yükler altında lamine kompozit kirişlerin burulması ve titreşim analizi için yeni hibrid şekil fonksiyonları sunmuşlardır. Mevcut çalışmanın yer değiştirme alanı, yüksek dereceli bir kesme deformasyon kirişi teorisine dayanmaktadır. Hareket denklemlerini Lagrange eşitliklerinden elde etmişlerdir. Çeşitli sınır koşulları için kabul edilebilir ve üstel fonksiyonların bir kombinasyonuna dayanan yeni hibrit şekil fonksiyonlarının önerildiği bir Ritz çözümü geliştirmişlerdir. Sayısal sonuçları, önceki çalışmalarla karşılaştırmışlar, açıklık-yükseklik oranı, sınır şartları, malzeme anizotropisi ve sıcaklık değişimlerinin burkulma yükü ile kirişlerin doğal frekansı üzerindeki etkilerini incelemek üzere sunmuşlardır.

Mantari ve Canales (2016) yapmış oldukları çalışmada lamine kirişlerin burkulma ve serbest titreşim analizi için, analitik bir çözüm sunmuşlardır. Yer değiştirme alanına yaklaşmak için Ritz yönteminde kullanılan fonksiyonları ya saf polinom dizisi ya da hibrid polinom-trigonometrik seri olarak seçmişlerdir. Sonuçların yakınsama analizini yapmış ve mevcut teorinin sayısal sonuçlarını, doğrulama için diğer teorilerle karşılaştırmışlardır.

Ngoc-Duong Nguyen ve ark., (2018) rastgele yerleştirilmiş mikro katmanlı kompozit kirişlerin boyut-bağımlı analizi için yeni Ritz fonksiyonları önermişlerdir. Lagrange denklemlerini, hareket denklemlerini elde etmek için kullanmışlardır. Sonuçlarında, bu çalışmanın, mikro kompozit kirişlerin eğilme, titreşim ve burkulma problemleri için etkili olduğunu göstermişlerdir. Gelecekteki çalışmalara ölçüt olarak hizmet etmesi için bazı yeni sonuçlar vermişlerdir.

Khalili ve ark., (2010) hareketli yüklere maruz kalan, fonksiyonel olarak derecelendirilmiş kirişlerin dinamik davranışlarını incelemek için karma bir yöntem sunmuşlardır. Teorik formülasyonları Euler-Bernoulli kiriş teorisine dayandırıp, sistemin hareket denklemleri Lagrange denklemleri kullanarak türetmişlerdir. Rayleigh-Ritz yöntemini, kısmi türevleri ayırmak için kullanmışlar ve türevlerin ayrılması için adım adım diferansiyel kareleme yöntemi kullanmışlardır. Önerilen karma yöntemin verimli ve güvenilir olduğu göstermişler, ayrıca, Newmark gibi tek adımlı yöntemlerle karşılaştırmışlardır.

Aydoğdu (2005) yapmış olduğu çalışmada, farklı sınır koşullarına sahip çapraz tabakalı kompozit kirişlerin titreşim analizini yapmıştır. Kirişlerde basit ve ankastre mesnetli sınır koşullarının altı farklı kombinasyonunu kullanmıştır. Serbest titreşim frekanslarını, üç yer değiştirme bileşeninin bir dizi basit cebirsel polinom içinde ifade edildiği Ritz yöntemini uygulayarak elde etmiştir. Örnek olarak bazı yakınsama çalışmaları sunmuştur.

Pradhan ve Chakraverty (2013) farklı sınır koşullarına sahip fonksiyonel dereceli malzeme kirişlerinin serbest titreşim analizlerini yapmışlardır. Analiz, klasik (Euler-Bernoulli) ve birinci mertebe kayma deformasyon teorilerine (Timoshenko) dayanmaktadır. Kiriş kesitlerinin yer değiştirme bileşenlerini ifade eden deneme fonksiyonlarını basit cebirsel polinom formlarında ifade etmişlerdir. Rayleigh-Ritz yöntemi ile temel denklemleri elde etmişlerdir. Bileşen hacim oranlarının, narinlik

oranlarının ve kiriş teorilerinin doğal frekanslar üzerindeki etkilerini incelemişlerdir. Mevcut analizi doğrulamak için, literatürdeki sonuçlarla karşılaştırma çalışmaları da yapmışlardır.

Zhou (2000) çalışmasında, çok açıklıklı Timoshenko kirişlerinin serbest titreşimlerini Rayleigh-Ritz yöntemi ile incelemiştir.

Gürlek (2018) yapmış olduğu çalışmada tabakalı kompozit kirişlerin gerilme ve şekil değiştirme analizlerini sonlu farklar yöntemini kullanarak yapmıştır. Analizlerinde farklı mesnet koşulları ve farklı yüklemeler etkisi altındaki kirişleri, Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş teorilerine göre incelemiştir. Gerilme ve şekil değiştirme analizlerini yaparken ilgili bünye bağıntıları ve denge denklemleri için bazı kabuller yapmıştır. Üç boyutlu doğrusal olmayan şekil değiştirme ifadeleri, iki boyutlu ve doğrusal şekil değiştirme ifadelerine indirgemıştır. Diferansiyel denklemlerin çözümünü için merkezi sonlu farklar yöntemini kullanmıştır. Elde ettiği sonuçları tablo ve grafiklerle sunmuştur.

Özütok ve arkadaşları (2014) çalışmalarında, açılı lamine kompozit kirişlerin serbest titreşim analizlerini incelemişlerdir. Fonksiyonelleri Gâteaux diferansiyel metodu kullanarak elde etmişler ve kompozit kirişlerin doğal frekanslarını, Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş teorisi temelinde karışık sonlu elemanlar formülasyonu kullanarak hesaplamışlardır. Euler-Bernoulli kiriş teorisi için düğüm noktalarında bilinmeyen olarak düşey yer değiştirme ve moment içeren 4 serbestlik derecesine sahip CLBT4 kiriş elemanı geliştirmişlerdir. Timoshenko kiriş teorisi için bilinmeyen olarak düşey yer değiştirme, moment, kesme kuvveti ve dönmeyi içeren 8 serbestlik derecesine sahip FSDT8 kiriş elemanı türetmişlerdir. Analizleri geliştirdikleri bir program ile yürüterek farklı sınır koşulları için elde ettikleri sayısal sonuçları literatürdeki sonuçlarla karşılaştırarak yaklaşımın güvenilirliğini göstermişlerdir.

Özütok ve Madenci (2017) yapmış oldukları çalışmada, lamine kompozit kirişler için bir fonksiyonele dayanan karışık sonlu elemanlar yöntemini kullanmışlardır. Alan denklemlerini elde etmek için virtüel yer değiştirme prensibi uygulamışlar, denklemleri operatör formda yazarak, ardından Gâteaux diferansiyel metodu kullanarak, dinamik ve geometrik sınır şartlarını içeren fonksiyonelleri potansiyel şartları sağlandıktan sonra elde etmişlerdir. Lamine kirişin kalınlığı boyunca kayma

gerilmesinin doğrusal olmayan dağılımını içeren yüksek dereceli kayma deformasyon teorisi sunmuşlardır. Elde edilen sonuçların mevcut sonuçlar ile iyi bir uyum gösterdiğini göstermişlerdir.

Vo ve Thai (2012) yapmış oldukları çalışmada farklı deformasyon teorileri kullanarak kompozit kirişlerin statik davranışını incelemişlerdir. Kayma deformasyon etkilerini hesaba katan, düğüm başına altı serbestlik derecesine sahip iki düğümlü bir C1 sonlu eleman ve problemi çözmek için malzeme anizotropisinden gelen tüm eşleşmeler geliştirmişlerdir. Düzgün dağılmış yük ve konsantre yük altında simetrik ve anti-simetrik çapraz kat kompozit kirişler için sayısal sonuçlar elde etmişlerdir. Lif açısı ve düzeninin kayma deformasyon parametresi ve uzama-burulma-kayma-dönme tepkisi üzerindeki etkilerini incelemişlerdir.

Vo, Thai ve arkadaşları (2017) yapmış oldukları bir diğer çalışmada, yarı ve üç boyutlu bir teori kullanarak kompozit ve sandviç kirişlerin eğilme analizi, normal ve kayma deformasyonu ve aynı zamanda anizotropi ile kaplama gibi üç etkiyi göz önünde bulundurmışlardır. Eksenel ve enine yer değiştirmelerin kiriş derinliği boyunca kübik ve parabolik varyasyon olduğunu varsaymışlar, sayısal sonuçlar vererek literatürdeki sonuçlarla karşılaştırmışlardır.

Zhen ve Wanji (2007) yaptıkları çalışmada çeşitli yer değiştirme temelli teoriler ile lamine kirişlerin stabilite, titreşim ve burulma davranışlarını incelemek için analizler yapmışlardır. Lamine yapıların dinamik tepkisini düzenleyen denklemlerini Hamilton prensibini kullanılarak türetmişlerdir. Bununla birlikte, burkulma problemleri için denge denklemleri sanal yer değiştirme prensibini kullanarak vermişlerdir. Ayrıca, Navier'nin tekniğini kullanarak ve özdeğer denklemlerini çözerek, bu çalışmada kullanılan küresel-yerel üst düzey teoriye dayanan analitik çözümleri ilk olarak bu çalışmada sunmuşlardır.

Arıbas ve arkadaşları (2017) elastik temeldeki düzlemsel kavisli kompozit Timoshenko kirişinin statik ve serbest titreşim analizini, karışık sonlu elemanlar formülasyonu ile incelemişlerdir.

Aköz ve Kadioğlu (1996) çalışmalarında, keyfi yükleme altında elastik Winkler zemini üzerinde değişken kesitli dairesel kirişleri karışık sonlu elemanlar yöntemi ile analiz etmişlerdir. Fonksiyonelleri Gâteaux diferansiyel yöntemi ile elde etmişlerdir.

Ek olarak, elastik temellerdeki düz çubuklar için özel bir durum sonlu eleman formülasyonu vermişlerdir.

Xu ve Wu (2007) yaptıkları çalışmada kısmi etkileşim kompozit kirişlerin statik, dinamik ve burulma davranışını araştırmak için ara tabaka kaymasının dahil edilmesiyle birlikte Timoshenko kiriş teorisini kullanmışlardır. Temel diferansiyel denklemler ve çözümleri belirli sınır koşullarında statik denge, serbest titreşim ve burkulma davranışı için analitik olarak elde edilmiştir. Ayrıca enine kayma deformasyonu ve dönme eylemsizlik momentinin bileşik tabakaların sapmaları, frekansları ve burkulma yükleri üzerindeki etkilerini göstermek için sayısal sonuçlar da sunmuşlardır.

Araştırmacıların plak elemanlar için Ritz yöntemi ya da farklı yöntemler kullanarak statik ve dinamik analiz çalışmaları literatürde mevcuttur. Bunlardan bazıları;

Cheung ve Zhou (1998) çalışmalarında, bir ya da iki yönde geniş aralıklı düzgün olmayan dikdörtgen plakaların serbest titreşimlerini dikkate almışlardır. Bir Taylor serisine genişletilmiş, keyfi bir statik yük altında, konik kirişin statik çözümleri olan yeni bir kabul edilebilir fonksiyon kümesi geliştirmişlerdir. Rayleigh-Ritz yöntemini kullanarak öz frekans denklemini elde etmişlerdir. Genel bir bilgisayar programı derleyerek ve bazı sayısal sonuçları tablo ile vermişlerdir.

Shi ve arkadaşları (2017) yaptıkları çalışmada elastik Winkler veya Pasternak temelleri üzerinde orta kalınlıkta lamine kompozit dikdörtgen plakaların serbest ve zorlanmış titreşim özelliklerini incelemek için geliştirilmiş bir Fourier serileri yöntemi (IFSM) uygulamışlardır. Tüm seri genişleme katsayılarını çözmek için Rayleigh-Ritz yöntemini uygulamışlardır.

Aköz ve Uzcan (1991) Reissner plakaları için geometrik ve dinamik sınır koşullarına sahip yeni bir fonksiyoneli Gâteaux diferansiyeli kullanılarak sunmuşlardır. Bu fonksiyonel, klasik potansiyel enerji denklemine dönüştürülebilir, Ritz veya sonlu eleman metodları kullanılırken olduğu gibi sayısal yöntemler kullanıldığında doğru sonuçların elde edilmesinde de yararlı olmuştur. Fonksiyonel ve Ritz yöntemi kullanarak çeşitli örnekler çözmüşler ve elde edilen sonuçları, literatürdeki sonuçlarla karşılaştırmışlardır.

Aköz ve Özütok (2000) çalışmalarında Gâteaux diferansiyel yöntemi ile keyfi kabuk geometrilerine ait yeni bir fonksiyonel elde etmişler ve çözümlerinde karışık sonlu

elemanlar yöntemini kullanmışlardır. Bu fonksiyoneli kullanılarak, değişken kalınlıktaki parabolik ve dairesel silindirik kabuklar için PRSH52 ve CRSH52 olarak ik farklı eleman türetmişlerdir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bilgisayar alanındaki gelişmelere bağlı olarak karmaşık yapıların çözümünde kullanılan sayısal yöntemlerin kullanımı da yaygınlaşmıştır. Bu çalışmada; yaygın olarak kullanılan, diğer yaklaşık yöntemlere göre bazı avantajları olan ve kesin sonuçlara çok iyi yaklaşım veren Gâteaux diferansiyeli yöntemi ile elde edilen fonksiyonelin çözümünde Ritz yöntemi kullanılmıştır.

3.1. Enerji Prensipleri ve Giriş Teorileri

Fiziksel olaylar, diferansiyel denklem ve sınır koşulları ile ifade edilebildiği gibi, bazı sınır koşullarını sağlayan fonksiyonlar arasında, bir fonksiyoneli stasyoner yapan fonksiyonun bulunmasına da getirilebilir. Bu fonksiyonel çoğu kez enerji gibi bir fiziksel anlamı da taşıyabilen skaler bir büyüklük olup, fiziksel olaylar için ilke sözcüğü ile adlandırılan kurallar kullanarak doğrudan elde edilebilir(Aköz, 1985).

3.1.1. Varyasyonel Operatör

Enerji yöntemleri, ilke olarak belirli bir fonksiyoneli stasyoner yapan çözümlerin aranması esasına dayanır. Fonksiyonellerin stasyoner özelliklerinin incelendiği matematik dalına ise değişim yöntemleri (varyasyon yöntemleri) adı verilir (Aköz, 1985).

Bir problem çözümünde çeşitli enerji ilkeleri kullanılabilir. Enerji ifadesi, diferansiyel denklem metodunda sıralanmış koşullardan bir kısmıyla bazı sınır şartlarını sağlayan bir çok çözümün fonksiyonelidir. Enerji ifadesinde durağanlık (ekstremum) koşulunun aranması, esas problem için çeşitli çözümler arasından gerçek çözümün ortaya çıkarılmasını sağlar.

$x_1 \leq x \leq x_2$ aralığında sürekli, $y(x_1)$ ve $y(x_2)$ sınır değerlerine sahip bir $y(x)$ fonksiyonu düşünelim. Yine aynı aralıkta $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ homojen sınır koşullarına sahip başka bir $\eta(x)$ fonksiyonu daha olsun. Eğer κ küçük bir gerçel parametre ise,

$y(x)$ e çok yakın başka bir $\tilde{y}(x)$ fonksiyonu,

$$\tilde{y}(x) = y(x) + \kappa\eta(x) \quad (3.1)$$

biçiminde yazılabilir. İfade $\tilde{y}(x) - y(x)$ farkı olarak yazılırsa buna $y(x)$ in değişimi (varyasyonu) denir ve δy ile gösterilir,

$$\delta y = \tilde{y}(x) - y(x) = \kappa\eta(x) \quad (3.2)$$

olarak yazılır. Burada $\kappa > 0$ ve $\kappa \ll 0$ olmak üzere keyfi bir sayıdır. δ ya değişimsel (varyasyonel) operatör ve δy ya $y(x)$ in birinci değişimi (varyasyonu) denir. Benzer şekilde $\tilde{y}'(x)$ ile $y'(x)$ türevleri arasındaki fark $\delta y'$ ile gösterildiğinde türevlerin değişimi de,

$$\delta y' = \tilde{y}'(x) - y'(x) = \kappa\eta'(x) \quad (3.3)$$

dir.(3.2) ve (3.3) denklemlerine bakıldığında değişimin türevi, türevin değişimine eşittir yani $(\delta y)' = \delta(y')$ dir.

Tam diferansiyel operatörü d ile varyasyonel operatör δ arasındaki analogi şu şekildedir ki y değişkenine bağlı bir F fonksiyoneli düşünelim ve türevi $y' = dy/dx$ olsun. Fonksiyonelin x sabit için tam diferansiyeli,

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial y'} dy' \quad (3.4)$$

iken, F 'in birinci varyasyonu sırasında $y(x)$ ve $\eta(x)$ fonksiyonları $y + \delta y$ ve $\eta + \delta\eta$ biçiminde değişirlerse F fonksiyonelinin birinci varyasyonu,

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \quad (3.5)$$

şeklindedir. y nin $y+\delta y$ ve η nin $\eta+\delta\eta$ değişimi esnasında x =sabit olduğundan $\delta x \equiv 0$ dır. Yani δ varyasyonel operatörü y bağımlı değişkene göre bir diferansiyel operatördür. δ varyasyonel operatörü, diferansiyel operatörü d ile ya da integral operatörü \int ile yer değiştirebilir. Şöyle ki;

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\delta y) &= (\kappa\eta') = \kappa\eta' = \delta\left(\frac{dy}{dx}\right) \\ \delta\left(\int_L y dx\right) &= \kappa\int_L \eta dx = \int_L \kappa\eta dx = \int_L \delta y dx\end{aligned}\quad (3.6)$$

Bunun yanında $y = y(x)$ ve $\eta = \eta(x)$ birer fonksiyon olmak üzere diferansiyel operatörü d ile δ varyasyonel operatörü arasında da $F_1 = F_2(y)$, $F_2 = F_2(y)$, ve $G = G(y, \eta)$ için,

$$\begin{aligned}\delta(F_1 \pm F_2) &= \delta F_1 \pm \delta F_2 \\ \delta(F_1 F_2) &= F_2 \delta F_1 + F_1 \delta F_2 \\ \delta\left(\frac{F_1}{F_2}\right) &= \frac{F_2 \delta F_1 - F_1 \delta F_2}{F_2^2} \\ \delta(F_1)^n &= n(F_1)^{n-1} \delta F_1 \\ \delta G &= \frac{\partial G}{\partial y} \delta y + \frac{\partial G}{\partial \eta} \delta \eta\end{aligned}\quad (3.7)$$

analojiden bahsedilebilir.

3.1.2. Euler-Lagrange Denklemi

Bir fonksiyonel

$$I(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx \quad (3.8)$$

gibi integral içinde, bilinmeyen fonksiyonla, bu fonksiyonun türevleri şeklinde tanımlanabilir. Varyasyonel çözümde temel problem $I(y)$ fonksiyonelinin minimum yapan $y = y_0(x)$ fonksiyonunun bulunmasıdır. O halde $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ homojen sınır koşullarını sağlayan bir $\eta(x)$ için $y = y_0 + \kappa\eta$ fonksiyonele yerleştirilirse $I(y) \geq I(y_0)$ olur. y_0 'nin sabit değeri için $I(y_0 + \kappa\eta)$ integrali gerçel κ parametresinin fonksiyonudur. Şu halde $I(y_0 + \kappa\eta)$ nın $\kappa = 0$ da bir minimumu, ancak $I(y_0 + \kappa\eta)$ nın κ ya göre türevinin $\kappa = 0$ da sıfır olması ile mümkündür. Yani;

$$\left[\frac{d}{d\kappa} I(y_0 + \kappa\eta) \right]_{\kappa=0} = 0 \quad (3.9)$$

olmalıdır. Tanım olarak $I(y)$ fonksiyonelinin birinci değişimi,

$$\delta I(y_0; \eta) \equiv \kappa \left[\frac{d}{d\kappa} I(y_0 + \kappa\eta) \right]_{\kappa=0} = 0 \quad (3.10)$$

şeklinde yazılır. O zaman $I(y)$ fonksiyonelinin y_0 de minimum olması için gerek koşul,

$$\delta I(y_0; \eta) = 0 \quad (3.11)$$

dır. Bu tanıma göre $I(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx$ fonksiyonelinin ekstremum olma koşulu,

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} [\delta F] dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y_0} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'_0} \delta y' \right) dx = 0 \quad (3.12)$$

Bu tanıma göre $\delta y'$ yi daha uygun şekilde yazmak için $\delta y' \equiv (\delta y)'$ eşitliğinden

yararlanılarak denklem (3.12) düzenlenirse,

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y_0} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y_0'} (\delta y)' \right) dx = 0 \quad (3.13)$$

olarak yazılır. İntegral içerisindeki ifadeye kısmi integrasyon işlemi uygulanarak gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y_0} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y_0'} \right) \right] \delta y dx + \left[\delta y \frac{\partial F}{\partial y_0'} \right]_{x_1}^{x_2} = 0 \quad (3.14)$$

elde edilir. $\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0$ olduğundan denklem (3.14)'ün sağındaki sınır terimi sıfır olur. Bu halde $\delta I = 0$ olabilmesi için denklemin integral içindeki birinci ifade,

$$\frac{\partial F}{\partial y_0} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y_0'} \right) = 0 \quad (3.15)$$

sıfır olmalıdır. Diferansiyel bir denklem olan bu ifade $I(y)$ nin Euler denklemi ya da Euler-Lagrange denklemidir. Aranılan $y(x)$ fonksiyonu Euler-Lagrange denklemini sağladığında aynı zamanda denklem (3.8) fonksiyonelinin minimum yapar.

3.1.3. Dinamik ve Geometrik Sınır Koşulları

- İkinci dereceden türevi $x_1 \leq x \leq x_2$ aralığında sürekli olan, tanımlı $y(x)$ fonksiyonu için $y(x_1)$ ve $y(x_2)$ sınır değerleri verildiğinde denklem (3.8) deki fonksiyonelin minimum olma koşulu olan Euler denklemi elde edilmişti. $y(x)$ in sınırlı ya da belirlenmediği durumda denklem (3.14)'ün sağlanması için hem integral içindeki terim hem de sınır terimi sıfıra eşitlenir.

Kısaca Euler denkleminin yanında $x = x_1$ ve $x = x_2$ de,

$$\delta y = 0 \quad \text{ya da} \quad \frac{\partial F}{\partial y'_0} = 0 \quad (3.16)$$

olmalıdır. Burada birinci terim asıl (geometrik) sınır koşulunu, ikinci terim ise doğal (dinamik) sınır koşulunu ifade eder (Omurtag 2012).

3.1.4. Virtüel Yer Değiştirme İlkesi

Bir probleme ait gerçek çözümde σ gerilmeleri, u yer değiştirmeleri gösterebilir. Problemin sınır koşullarını sağlayacak biçimde yer değiştirmeler δu kadar artırılabilir ve $u + \delta u$ yer değiştirmelerini göz önüne alınabilir. δu , u 'nun değişimidir ve virtüel yer değiştirme adını alır. Yer değiştiren kuvvette bir virtüel iş üretir. Virtüel yer değiştirme kavramı genişletilirse virtüel şekil değiştirmeye ulaşılır. Virtüel yer ve şekil değiştirmeler çok küçük büyüklüklerdir ki bu nedenle hesaplamalar şekil değiştirmemiş geometri üzerinde yapılır.

“Dış kuvvetler altında dengede olan bir sisteme virtüel bir şekil değiştirme verilirse, bu virtüel şekil değiştirme altında dış kuvvetlerin virtüel işi δW , iç kuvvetlerin virtüel işi δU ’ya eşittir.”

$$\delta U = \delta W \quad (3.17)$$

$$\int_0^L \int_A (\sigma_x \delta \varepsilon_x) dA dx = - \int_0^L q \delta w dx \quad (3.18)$$

Bu kuram cismin bünye yapısından bağımsız olması nedeniyle rijit, elastik, plastik ya da viskoelastik tüm cisimler için geçerlidir.

3.1.5. Teori ve Formülasyon

Farklı kiriş teorilerini tanımlamak için x, y, z koordinat takımına göre kiriş kesit ortamında bir noktanın yer değiştirme vektörü $\mathbf{u}=\mathbf{u}(u, v, w)$ 'nin bileşenleri,

$$\begin{aligned} u &= z [c_0 w_{,x} + c_1 \phi(x)] \\ v &= 0 \\ w &= w_0(x) \end{aligned} \quad (3.19)$$

olarak kabul edilmiştir. Burada ϕ, x 'in bir fonksiyonu olarak,

$$\phi_x = [\gamma_{xz} - w_{,x}] \quad (3.20)$$

y eksenini etrafındaki dönmeyi ifade eder.

Yukarıda verilen (3.19) denklemindeki yer değiştirme alanlarının içinde Euler-Bernoulli kiriş teorisi ile Timoshenko kiriş teorisine ait yer değiştirme alanları mevcuttur. Buradaki yer değiştirmelerde Euler-Bernoulli kiriş teorisi için $c_0 = -1$, $c_1 = 0$ Timoshenko kiriş teorisi için $c_0 = 0$, $c_1 = 1$ alınacaktır.

3.1.6. Euler-Bernoulli Kiriş Teorisi

Euler-Bernoulli teorisi gereği çubukta kesme etkisi ihmal edildiğinden kayma açıları $\gamma \approx 0$ olur. Buna göre başlangıçta çubuk eksenine dik olan enkesitler şekil değiştirme sırasında çubuk eksenine dik kalacak şekilde rijit bir levha gibi dönerler. Yayılı q dış kuvvetinin altında kalınlığı h olan bir kirişin yer değiştirme alanı şu şekilde tanımlanabilir;

$$\begin{aligned} u(x, z) &= -z w_{,x} \\ w(x, z) &= w(x) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Yukarıdaki yer değiştirme ifadesine göre gerçek uzama oranı;

$$\varepsilon_x = u_{,x} = -z w_{,xx} \quad (3.22)$$

dir. Virtüel Şekil değiştirme $\delta\varepsilon_x$ ise denklem (3.22) de yerine yazılırsa,

$$\delta\varepsilon_x = -z \delta w_{,xx} \quad (3.23)$$

elde edilir. Denge denklemlerini türetmek için virtüel yer değiştirme ilkesini kullanırsak iç kuvvetlerin toplam virtüel işi;

$$\delta U = \int_0^L \int_A (\sigma_x \delta\varepsilon_x) dA dx \quad (3.24)$$

dir. Denklem (3.21), denklem (3.22) de yerine yazıldığında,

$$\delta U = \int_0^L \int_A \left\{ \sigma_x (-z \delta w_{,xx}) \right\} dA dx = \int_0^L -M_x \delta w_{,xx} dx \quad (3.25)$$

elde edilir. Burada M_x eğilme momenti, A kesit alanı olmak üzere,

$$M_x = \int_A \sigma_x z dA \quad (3.26)$$

Şeklinde hesaplanabilir. Dış kuvvetlerin işi ise;

$$\delta W = - \int_0^L q \delta w dx \quad (3.27)$$

dir. Verilen bir kiriş eleman için dengede olma durumunda virtüel işi ilkesi gereği,

$$\delta U + \delta W = 0 \quad (3.28)$$

dir. İfade açık şekilde yazılırsa,

$$\int_0^L (-M_x \delta w_{,xx}) dx - \int_0^L q \delta w dx = 0 \quad (3.29)$$

elde edilir. Burada $\delta w_{,xx}$ ifadesindeki türevler kısmi integrasyon uygulanarak düzenlenirse,

$$\int_0^L (-M_x \delta w_{,xx}) dx = -[M_x \delta w_{,x}]_0^L + [M_{x,x} \delta w]_0^L - \int_0^L (M_{x,xx} \delta w) dx \quad (3.30)$$

elde edilir. Bu ifade denklem (3.29)' de yerine yazılarak düzenlenirse,

$$\int_0^L \{[-M_{x,xx} - q] \delta w\} dx = 0 \quad (3.31)$$

dir. Buradan ise,

$$-M_{x,xx} - q = 0 \quad (3.32)$$

olarak denge denklemi de elde edilir. Lineer elastik izotrop malzeme kabulünden dolayı,

$$\begin{aligned} \sigma_x &= E \varepsilon_x \\ \tau_{xz} &= G \gamma_{xz} \end{aligned} \quad (3.33)$$

olduğu bilinmektedir. Euler-Bernoulli kiriş teorisinde moment ifadesi,

$$M = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz = \int_{-h/2}^{h/2} E [-z w_{,xx}] z dz = -EI w_{,xx} \quad (3.34)$$

dir. Buradan Euler-Bernoulli kirişi için kinematik denklem,

$$-\frac{M}{EI} - w_{,xx} = 0 \quad (3.35)$$

elde edilir.

3.1.7. Timoshenko Kiriş Teorisi

Timoshenko teorisi gereği başlangıçta çubuk eksenine dik olan kesit şekil değiştirme sırasında rijit bir levha gibi döner ancak kayma açısı γ nedeniyle çubuk eksenini ile arasındaki açı dik değildir. Teori kesme kuvvetinin sebep olduğu kayma açısının γ sabit olduğu varsayımına dayanır. Bu nedenle denklem (3.19)' deki yer değiştirme ifadesine göre uzama oranı ve denklem (3.20)' deki kayma açısı ifadesi,

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= u_{,x} = z \phi_{,x,x} \\ \gamma_{xz} &= w_{,x} + \phi_x \end{aligned} \quad (3.36)$$

olarak elde edilir. Virtüel şekil değiştirme ifadeleri ise,

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_x &= z \delta \phi_{,x,x} \\ \delta \gamma_{xz} &= \delta w_{,x} + \delta \phi_x \end{aligned} \quad (3.37)$$

şeklindedir. Virtüel yer değiştirme ilkesi gereği, $\delta U + \delta W = 0$ denkleminde yukarıdaki ifadeler yerine yazılarak,

$$\int_0^L \int_A (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{xz} \gamma_{xz}) dA dx - \int_0^L q \delta w dx = 0$$

$$\int_0^L \int_A \left\{ \sigma_x (z \delta \phi_{x,x}) + \tau_{xz} (\delta w_{,x} + \delta \phi_x) \right\} dA dx - \int_0^L q \delta w dx = 0 \quad (3.38)$$

elde edilir. Burada M_x eğilme momenti, Q_x kesme kuvveti ve A kesit alanı olmak üzere,

$$M_x(x) = \int_A \sigma_x z dA$$

$$Q_x(x) = \int_A \tau_{xz} dA \quad (3.39)$$

dir. Denklem (3.38) düzenlendiğinde,

$$\int_0^L \left\{ M_x \delta \phi_{x,x} + Q_x (\delta w_{,x} + \delta \phi_x) \right\} dx - \int_0^L q \delta w dx = 0 \quad (3.40)$$

halini almaktadır. Türevli ifadeler kısmi integrasyon işlemi uygulandığında,

$$\int_0^L \left[(-M_{x,x} + Q_x) \delta \phi_x + (-Q_{x,x} - q) \delta w \right] dx + M_x \delta \phi_x \Big|_0^L + Q_x \delta w \Big|_0^L \quad (3.41)$$

elde edilir. Denklem (3.41)'de integral içindeki ifadeden,

$$\begin{aligned} -M_{x,x} + Q_x &= 0 \\ -Q_{x,x} - q &= 0 \end{aligned} \quad (3.42)$$

Timoshenko kirişi için denge denklemleri elde edilmiş olur. Denklem (3.33) deki gerilme ifadeleri denklem (3.39) da yerine yazıldığında Timoshenko kirişi için moment ifadesi;

$$M = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz = \int_{-h/2}^{h/2} E [z \phi_{x,x}] z dz = -EI \phi_{x,x} \quad (3.43)$$

olur. Bu denklem düzenlendiğinde Timoshenko kirişi için kinematik denklemi,

$$\frac{M}{EI} - \phi_{x,x} = 0 \quad (3.44)$$

şeklinde elde edilir. Kesme kuvveti (bünye denklemi) ise,

$$Q_x = K \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz = K \int_{-h/2}^{h/2} G \gamma_{xz} dz = K \int_{-h/2}^{h/2} G (w_{,x} + \phi_x) dz$$

$$Q_x = KGh (w_{,x} + \phi_x) \quad (3.45)$$

dir. Burada K kayma düzeltme faktörü olup çalışma da 5/6 olarak kullanılacaktır. G kayma modülü olup izotrop malzeme için $G = E/2(1+\nu)$ formülü ile bulunur.

Denklem (3.32) ve (3.35) de elde edilen Euler-Bernoulli kiriş teorisine ait denklemler ile (3.42), (3.44) ve (3.45) de elde edilen Timoshenko kiriş teorisine ait denge denklemlerine ilave kirişin dinamik sınır koşulları,

$$-\mathbf{M} + \widehat{\mathbf{M}} = 0 \quad , \quad -\mathbf{R} + \widehat{\mathbf{R}} = 0 \quad (3.46)$$

geometrik sınır koşulları,

$$-\boldsymbol{\Omega} + \widehat{\boldsymbol{\Omega}} = 0 \quad , \quad -\mathbf{u} + \widehat{\mathbf{u}} = 0 \quad (3.47)$$

şeklinde sembolik olarak yazılabilir. Denklem (3.46) ve (3.47) daki $\widehat{\mathbf{M}}, \widehat{\mathbf{R}}, \widehat{\boldsymbol{\Omega}}, \widehat{\mathbf{u}}$ ifadeleri sırasıyla sınırlarda bilinen moment, kesme kuvveti, dönme ve yer değiştirme vektörlerini ifade etmektedir. Dinamik ve geometrik sınır koşulları belirlenen, ardından bu sınır koşullarını içeren alan denklemleri operatör formda

matris formunda yazılabilir. Buradaki L_{ij} , y_i ve f_i ifadeleri sırası ile,

$$\begin{aligned}
L_{1,4} &= -(\cdot)_{,x} \\
L_{2,3} &= -(\cdot)_{,x} , \quad L_{2,4} = 1 \\
L_{3,2} &= (\cdot)_{,x} , \quad L_{3,3} = -\alpha \\
L_{4,1} &= (\cdot)_{,x} , \quad L_{4,2} = 1 , \quad L_{4,4} = -\beta \\
y_1 &= w , \quad y_2 = \phi , \quad y_3 = M , \quad y_4 = Q , \quad f_1 = q
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Buradaki $\alpha = 1/EI$ ve $\beta = 1/KGh$ dir.

Fonksiyonel ifadesi denklem (3.8) de tanımlanmıştı. Euler-Bernoulli ve Timoshenko kirişleri için, elde edilen alan denklemlerine ait fonksiyonellerin bulunması için bu amaca uygun Gâteaux diferansiyeli yöntemi kullanılmıştır. Gâteaux diferansiyeli yöntemi ile ilgili daha ayrıntılı bilgi için (Aköz 1991, 2000) kaynaklara bakılması önerilir. Q operatörünün Gâteaux türevi,

$$dQ(y; \bar{y}) = \left. \frac{\partial Q(y + \tau \bar{y})}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} \tag{3.53}$$

şeklinde tanımlanır. Burada τ bir skalerdir. Q operatörüne ait fonksiyonelin bulunmasından önce Q operatörünün potansiyellik koşulunu sağlaması gerekir. Bunun için bu fonksiyondan türetilen tüm fonksiyonların toplamının yine bu fonksiyona eşit olması gerekir. Q operatörü sürekli bir operatörse ve $\langle dQ(y; \bar{y}) \rangle$ gibi Gâteaux diferansiyeli varsa ve,

$$\langle dQ(y; \bar{y}), y^* \rangle = \langle dQ(\bar{y}; y^*), \bar{y} \rangle \tag{3.54}$$

eşitliği sağlanıyorsa bu durumda Q operatörü potansiyeldir. Eşitlikteki \langle , \rangle ifadesi iç çarpımı göstermekte, \bar{y}, y^* ifadeleri y 'nin içinde bulunduğu uzayın elemanlarıdır. Bu gösterime göre Q operatörünün \bar{y} yönüne göre türevinin, y^* yönündeki türevinin

toplamı, bu operatörün y^* yönüne göre türevinin, \bar{y} yönündeki türevinin toplamına eşittir. Bu tanımlar kullanılarak iç çarpımlar yapıldığı takdirde Euler-Bernoulli kirişi için denklem (3.49), Timoshenko kirişi için denklem (3.51)' daki Q operatörünün potansiyel olduğu görülür.

Potansiyellik koşulunun sağladığı alan denklemlerine karşı gelen Q operatörünün fonksiyoneli Gâteaux türevi kullanılarak,

$$I(y) = \int_0^1 \langle Q(sy), y \rangle ds \quad (3.55)$$

şeklinde hesaplanabilir. Burada s bir skalerdir. Euler-Bernoulli kirişi için Q operatörüne ait $I(y)$ fonksiyonelinin açık ifadesi,

$$I(y) = [M_{x,x}, w_x] - [q, w] - \frac{\alpha}{2} [M_x, M_x] - [\hat{w}_x, M_x]_{\epsilon} - [w, \hat{T}]_{\sigma} - [(M_x - \hat{M}_x), w_x]_{\sigma} + [(\hat{w} - w), T]_{\epsilon} \quad (3.56)$$

dir. Timoshenko kirişi için Q operatörüne ait $I(y)$ fonksiyonelinin açık ifadesi ,

$$I(y) = [Q_x, w_{x,x}] + [M_x, \phi_{x,x}] + [Q_x, \phi_x] - \frac{\alpha}{2} [M_x, M_x] - \frac{\beta}{2} [Q_x, Q_x] - [q, w] - [\hat{M}_x, \phi_x]_{\epsilon} - [\hat{Q}_x, w]_{\epsilon} - [Q_x, (w - \hat{w})]_{\sigma} - [(\phi_x - \hat{\phi}_x), M_x]_{\sigma} \quad (3.57)$$

şeklindedir. Buradaki σ alt indisi dinamik sınır koşulunu, ϵ alt indisi ise geometrik sınır koşulunu ifade etmektedir.

3. 2. Ritz Yöntemi

Ritz yöntemi probleme ait fonksiyonelin mevcut olduğu durumlarda diferansiyel denkleme çok iyi bir yaklaşım veren yaklaşık çözüm yöntemlerinden biridir. Yüksek

oranda doğruluk için Ritz yönteminde, seçilen interpolasyon fonksiyonunun problemin sınır koşullarını sağlamalıdır. Bu şekilde seçilen çözüm fonksiyonları kullanılarak diferansiyel denklem için yaklaşık bir çözüm yapılır. Yöntem integral formülasyonu kullanılarak fonksiyonel için güçlü yaklaşık çözüm veren varyasyonel yöntemlerinden biridir. Bu formülasyon bilinen fonksiyonlar ve bilinmeyen katsayıları içeren serileri içerir. İntegral formülasyon ile belirsiz katsayılar cinsinden bir dizi cebirsel denklemler sistemi elde edilir. Yeterli sayıda terim alınarak tam sonuca oldukça hassas yaklaşılabılır. Burada seçilecek çözüm fonksiyonlarının lineer bağımsız, tam ve geometrik sınır koşullarını sağlaması gerçek çözüme yakınsamada önemli etkenlerdir. Yöntem basit bir varyasyon problemi üzerinde açıklanmıştır. a ve b noktalarında sınır şartlarını sağlayan bir $y(x)$ fonksiyonu belirlenmek isteniyor. Bu fonksiyonun integrali f ile verilirse f 'in Euler-Lagrange denklemini sağlar. Öyle ki bu fonksiyon,

$$I(y) = \int_a^b f(x, y, y') dx \quad (3.58)$$

fonksiyoneli minimum yapsın. Burada problem için uygun fonksiyonların seçilmesine çalışılacaktır. Yukarıda ifade edildiği gibi seçilen fonksiyonun problemin sınır şartlarını sağlaması gerekir. Aranılan $y(x)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi gösterilebilir;

$$y(x) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x) = a_1 \varphi_1(x) + a_2 \varphi_2(x) + \dots + a_n \varphi_n(x) \quad (3.59)$$

burada $\varphi_i(x)$ ler problemin geometrik sınır koşullarını sağlayan keyfi fonksiyonlar ve a_i ler aranılan sabitlerdir. $y(x)$ için kabul edilen bu ifade $I(y)$ fonksiyoneliinde de yerine yazıldığında sadece a_i lerin bir fonksiyonu olan,

$$I(a_1, a_2, \dots, a_n) = \int_a^b f(x, y, y') dx \quad (3.60)$$

elde edilir. Eğer I fonksiyoneli minimum yapan a_i lerin değeri aranıyorsa I fonksiyonelinin a_i lere göre kısmi türevleri sıfır olmak zorundadır.

$$\frac{\partial I(y)}{\partial a_n} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (3.61)$$

Buradan elde edilen denklem sistemi çözüldüğünde bulunan a_i değerleri $y(x)$ ifadesinde yerine yazılarak aranan çözüm fonksiyonu bulunmuş olur. $y(x)$ fonksiyonundaki terim sayısı arttırıldıkça elde edilen $I(y)$ değeri genelde gerçek sonuca yaklaşır (İlhan, 2003).

3. 2. 1. Şekil Fonksiyonları için Trigonometrik Seriler

Denklem (3.56) de elde edilen Euler-Bernoulli kirişine ait fonksiyoneldeki değişkenler sırası ile $w = w(x)$, $M = M(x)$ dir. Bilinmeyen bu değişkenler için basit mesnetli kirişin dinamik ve geometrik sınır koşullarını sağlayacak şekilde trigonometrik şekil fonksiyonu,

$$\varphi_j(x) = \sin \frac{j\pi}{L} x \quad (j = 1, 3, 5, \dots, n) \quad (3.62)$$

olarak alınmıştır. Ritz metodunda kullanılmak üzere yer değiştirme ve momentin trigonometrik seri ifadeleri,

$$\begin{aligned} w(x) &= \sum_{j=1}^n \varphi_j(x) w_j \\ M(x) &= \sum_{j=1}^n \varphi_j(x) M_j \end{aligned} \quad (3.63)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Denklem (3.57) de elde edilen Timoshenko kirişine ait fonksiyoneldeki bilinmeyen değişkenler sırası ile $w = w(x)$, $M = M(x)$, $Q = Q(x)$, $\phi = \phi(x)$ dir. Timoshenko kirişi için de basit mesnetli kirişin dinamik ve geometrik sınır koşullarını sağlayacak şekilde trigonometrik şekil fonksiyonları; çökme ve moment için $\varphi_j(x)$, kesme kuvveti ve dönme için $\psi_j(x)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\varphi_j(x) &= \sin \frac{j\pi}{L} x \quad (j = 1, 3, 5, \dots, n) \\ \psi_j(x) &= \cos \frac{j\pi}{L} x \quad (j = 1, 3, 5, \dots, n)\end{aligned}\tag{3.64}$$

olarak tanımlanmıştır. Timoshenko kirişinde Ritz metodunda kullanılmak üzere yer değiştirme, moment, kesme kuvveti ve dönmenin trigonometrik seri ifadeleri,

$$\begin{aligned}w(x) &= \sum_{j=1}^n \varphi_j(x) w_j \\ M(x) &= \sum_{j=1}^n \varphi_j(x) M_j \\ Q(x) &= \sum_{j=1}^n \psi_j(x) Q_j \\ \phi(x) &= \sum_{j=1}^n \psi_j(x) \phi_j\end{aligned}\tag{3.65}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Denklem (3.63) deki trigonometrik seri ifadeleri Euler-Bernoulli kiriş teorisine ait fonksiyonelde yerine yazılarak denklem (3.61) de verilen Ritz metodu uygulandığında ortaya çıkacak trigonometrik şekil fonksiyonlarının çarpım ifadeleri,

$$\begin{aligned}
[k_1] &= \int_0^L \varphi_i \varphi_j dx \quad , \quad (i, j = 1, 2, 3, \dots, n) \\
[k_2] &= \int_0^L \varphi_i' \varphi_j' dx \quad , \quad (i, j = 1, 2, 3, \dots, n) \\
[k_4] &= \int_0^L q \varphi_i' dx \quad , \quad (i, j = 1, 2, 3, \dots, n)
\end{aligned} \tag{3.66}$$

Denklem (3.65) deki trigonometrik seri ifadeleri Timoshenko kiriş teorisine ait fonksiyonelde yerine yazılarak denklem (3.61) de verilen Ritz metodu uygulandığında ortaya çıkacak trigonometrik şekil fonksiyonlarının çarpım ifadeleri,

$$\begin{aligned}
[k_1] &= \int_0^L \varphi_i \varphi_j dx \quad , \quad (i, j = 1, 2, 3, \dots, n) \\
[k_4] &= \int_0^L q \varphi_i' dx \quad , \quad (i, j = 1, 2, 3, \dots, n) \\
[k_5] &= \int_0^L \varphi_i \psi_j' dx \quad , \quad (i, j = 1, 2, 3, \dots, n) \\
[k_6] &= \int_0^L \psi_i \psi_j dx \quad , \quad (i, j = 1, 2, 3, \dots, n) \\
[k_7] &= \int_0^L \psi_i \varphi_j' dx \quad , \quad (i, j = 1, 2, 3, \dots, n)
\end{aligned} \tag{3.67}$$

olarak kapalı formda yazılabilir.

Euler-Bernoulli kirişi için denklem (3.66) daki çarpım ifadeleri yerine yazıldığında sistem matrisi ve yük matrisi,

$$[S]_{EBT2} = \begin{bmatrix} M & w \\ -\alpha [k_1] & [k_2] \\ [k_2]^T & [0] \end{bmatrix}_{2n}^{2n} \quad [Y]_{EBT2} = \begin{bmatrix} [0] \\ [k_4] \end{bmatrix}_{2n} \tag{3.68}$$

elde edilir.

Timoshenko kirişi için ise denklem (3.67) deki çarpım ifadeleri yerlerine yazıldığında sistem matrisi ve yük matrisi,

$$[S]_{TBT4} = \begin{bmatrix} M & Q & \varphi & w \\ -\alpha[k_1] & [0] & [k_5] & [0] \\ [0] & -\beta[k_6] & [k_6] & [k_7] \\ [k_5]^T & [k_6]^T & [0] & [0] \\ [0] & [k_7]^T & [0] & [0] \end{bmatrix}^{4n}$$

$$[Y]_{TBT4} = \begin{bmatrix} 3n [0] \\ n [k_4] \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

olarak elde edilir.

3. 3. Dinamik Analiz

Mühendislik çalışmalarında titreşim problemleri önemli bir yere sahiptir. Titreşim bir denge noktası etrafındaki mekanik salınımdır ve dinamik bir davranışa sahiptir. Yapının dinamik özellikleri, doğrudan yer değiştirmelere bağlı olduğundan serbestlik dereceleri azaltılıp daha az değişken kullanılarak dinamik analiz yapılabilir. Serbestlik derecelerinde azaltma iki şekilde yapılır. Birincisi, atalet kuvveti önemli görülen yer değiştirme bileşenlerine verilir. İkincisi dinamik parametrelerin sayısı seçilen fonksiyonlarla sınırlandırılabilir. Bu amaçla ilk olarak problem özdeğer-öz vektör problemine dönüştürülür. Çalışmada Gâteaux türevine bağlı olarak geliştirilen Ritz formülasyonunda, dinamik halde en etkili olduğu düşünülen w' ye atalet kuvveti verilerek serbestlik derecesi azaltılmıştır. w' ler dışındaki tüm değişkenler f ile gösterilmiştir. w doğrultularında $q = -\omega^2 M w$ atalet kuvvetleri dış yük olarak alınırsa denklem (3.68) ve (3.69)' daki sistem matrisi,

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\omega^2 \mathbf{M} w \end{Bmatrix} \quad (3.70)$$

haline gelir. Burada $[\mathbf{M}] = \rho h [k_1]$ kütle matrisi, ρ yoğunluk, h kesit kalınlığıdır. Bu matris kütlelerin sürekli değişimi göz önüne alınarak hesaplanmıştır. Denklem açık hali ile,

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{11} \mathbf{f} + \mathbf{K}_{12} \mathbf{w} &= 0 \\ \mathbf{K}_{21} \mathbf{f} + \mathbf{K}_{22} \mathbf{w} &= -\omega^2 \mathbf{M} \mathbf{w} \end{aligned} \quad (3.71)$$

elde edilir. İlk denklemden \mathbf{f} çözülür ve ikinci denkleme yerine yazıldığında,

$$([\mathbf{K}^*] - \omega^2 [\mathbf{M}]) \{\mathbf{w}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (3.72)$$

elde edilir. Buradaki $[\mathbf{K}^*]$ matrisi indirgenmiş sistem matrisidir.

$$[\mathbf{K}^*] = [\mathbf{K}_{22}] - [\mathbf{K}_{21}] [\mathbf{K}_{11}]^{-1} [\mathbf{K}_{12}] \quad (3.73)$$

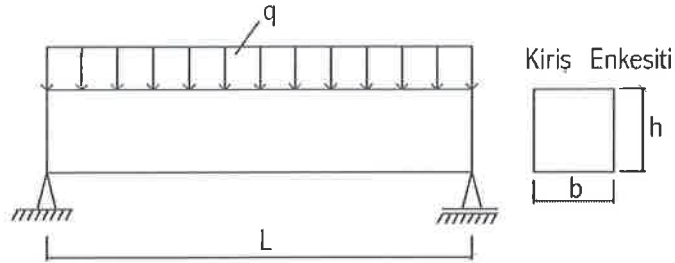
Artık problem bir özdeğer probleminin çözümüyle hesaplanır ve kirişin doğal titreşim frekansları elde edilir.

4.ARAŞTIRMA SONUÇLARI

Bu çalışmada iki ucu basit mesnetli, sabit kesit alanı olan, düzgün yayılı yük etkisi altındaki homojen ve izotropik Euler-Bernoulli (EBT2) ve Timoshenko (TBT4) kirişlerine ait alan denklemlerine karşı gelen fonksiyoneller, Gâteaux diferansiyel metodu ile elde edilmiştir. Ritz yöntemi kullanılarak bu fonksiyonellerdeki değişkenler olan çökme, moment kesme ve dönmeler geometrik ve dinamik sınır koşullarını sağlayan trigonometrik şekil fonksiyonları ile ifade edilmiştir. Elde edilen matrislerin çözümleri Mathematica 11.0 programı ile yapılmıştır. Analizlerde elde edilen sonuçlar literatürde benzer çalışmalardaki sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. Kirişler için statik hesaplamalarda kullanılan bazı parametrelerde kabuller yapılmıştır. Kabul edilen bu parametreler $E = 29000$, $b = 1$, $q = 10$, $\nu = 0,3$, $\rho = 1$ dir. Farklı L/h oranları için çözümler yapılmıştır.

Yapılan hesaplamaların tümünde Şekil 4.1. de verilen kiriş modeli dikkate alınmıştır. Statik analizlerde Euler-Bernoulli kiriş teorisi için maksimum yer değiştirmeler ve momentler, Timoshenko kiriş teorisi için ise maksimum yer değiştirmeler, momentler, kesme kuvvetleri ve dönmeler elde edilmiştir. Bulunan sonuçlar literatürdeki sonuçlarla ve analitik çözüm sonuçları ile karşılaştırılmıştır.

Dinamik analizlerde de Euler-Bernoulli ve Timoshenko kirişleri için iki ucu basit mesnetli olma durumunda serbest titreşim frekansları elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar literatürde benzer çalışma sonuçları ile karşılaştırılmıştır.

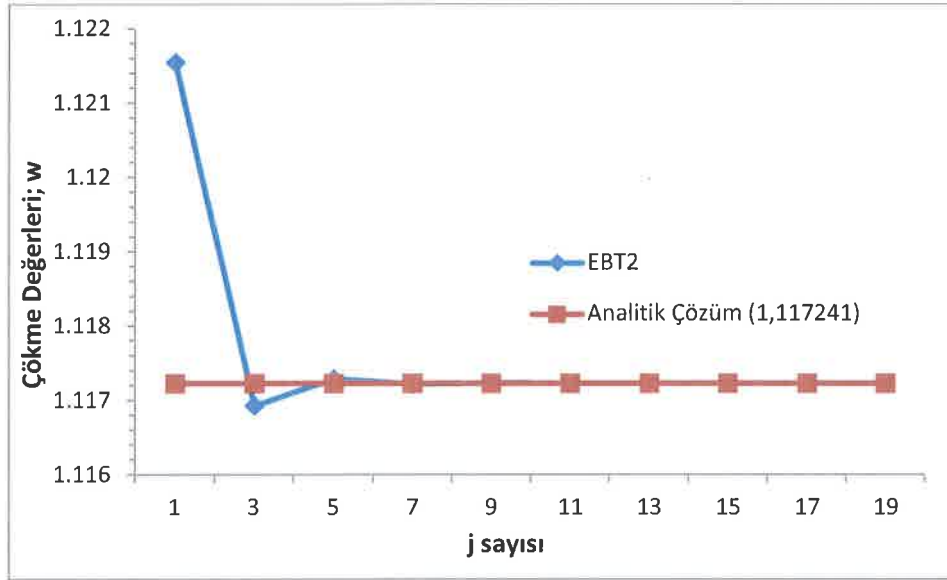


Şekil 4.1. İki ucu basit mesnetli kiriş modeli

4.1.Statik Analiz

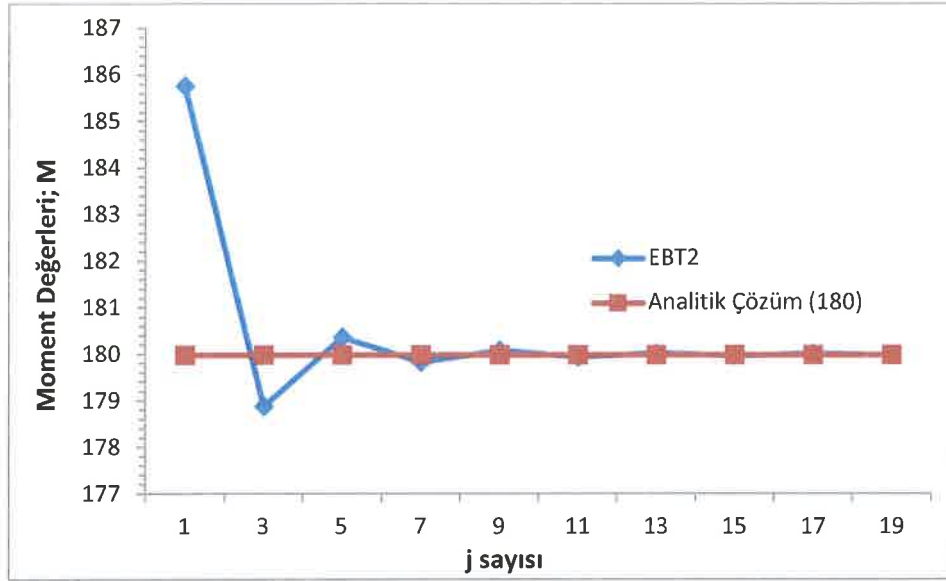
Bu bölümde Euler-Bernoulli (EBT2) kirişleri için yapılan hesaplamalarda;

- ❖ j sayısının artırılması ile maksimum yer değiştirme ve momentler için yaklaşım testi yapılmıştır,
- ❖ Farklı L/h oranlarına sahip kirişlerde maksimum yer değiştirmeler ve momentler elde edilerek benzer çalışmalar ve analitik çözüm sonuçları ile karşılaştırılmıştır,
- ❖ Kiriş üzerinde farklı noktadaki moment değerleri hesaplanarak analitik çözüm sonuçları ile karşılaştırılmıştır.



Şekil 4.2. EBT2 kirişi maksimum çökme için karşılaştırmalı yaklaşım testi (L=12, h=1)

Şekil 4.2. de görüldüğü gibi EBT2 kirişi için bulunan sonuçlar, i sayısının artması ile analitik çözüm sonucu elde edilen gerçek sonuçlarla j=5 sayısından itibaren uyumaktadır.



Şekil 4.3. EBT2 kirişi maksimum moment için karşılaştırmalı yaklaşım testi ($L=12$, $h=1$)

Şekil 4.3. de görüldüğü gibi kiriş ortasındaki maksimum moment değerleri, j sayısının artması ile analitik çözüm sonucu elde edilen gerçek sonuçlarla $j=9$ sayısından itibaren örtüşmektedir.

EBT2 kirişi için farklı L/h oranları dikkate alınarak yapılan çözümlerde maksimum çökme değerlerinin literatürdeki sonuçlarla karşılaştırması Çizelge 4.1 ve Çizelge 4.2. de verilmiştir.

Çizelge 4.1. Basit mesnetli kalın EBT2 kirişlerinin maksimum çökmesi (w)

Teori	Referans	Maksimum çökme (w) değerleri			
		L/h			
		12/12	40/12	80/12	160/12
EBT	EBT2	0.000647	0.07982	1.2772	20.4352
	Özütok ve Madenci	0.000644	0.07971	1.2750	20.4100
	Vo ve Thai	0.000647	0.07982	1.2771	20.4340
	Bicford	0.000647	0.07982	1.2771	20.4342

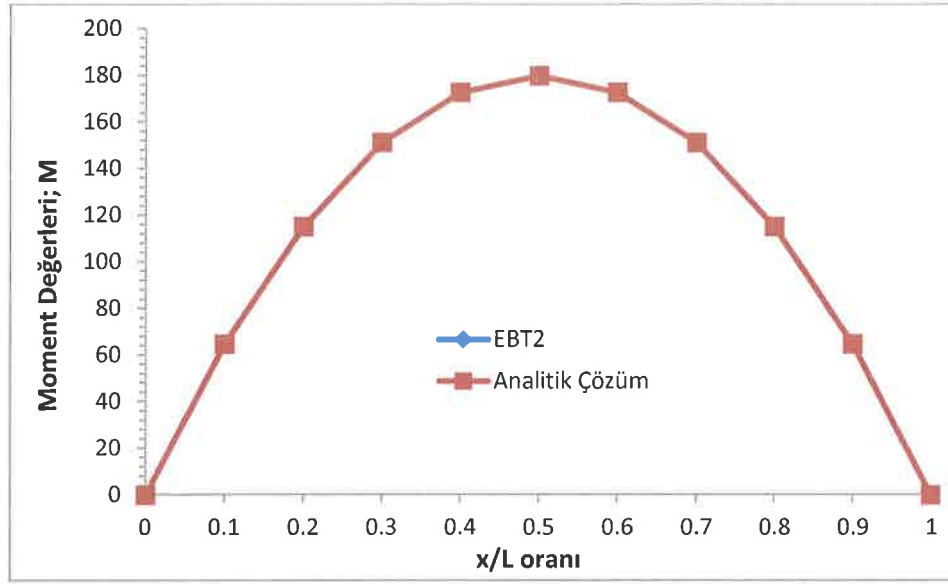
Çizelge 4.2. Basit mesnetli ince EBT2 kirişlerinin maksimum çökmesi (w)

		Maksimum çökme (w) değerleri			
Teori	Referans	L/h			
		12/1	40/1	80/1	160/1
EBT	EBT2	1.117294	137.938	2207	35,312
	Özütok ve Madenci	1.112	137.3	2197	35,160
	Bicford	1.117241	137.931	2206.897	35,310.34

Çizelge 4.3.' de görüldüğü gibi elde edilen moment değerleri analitik çözüm sonuçları ile hemen hemen aynıdır.

Çizelge 4.3. Basit mesnetli EBT2 kirişlerinin maksimum moment değeri (M)

		Maksimum moment (M) değerleri			
Teori	Referans	L			
		12	40	80	160
EBT	EBT2	180.088	2000.98	8003.91	32015.6
	Analitik Çözüm	180	2000	8000	32000

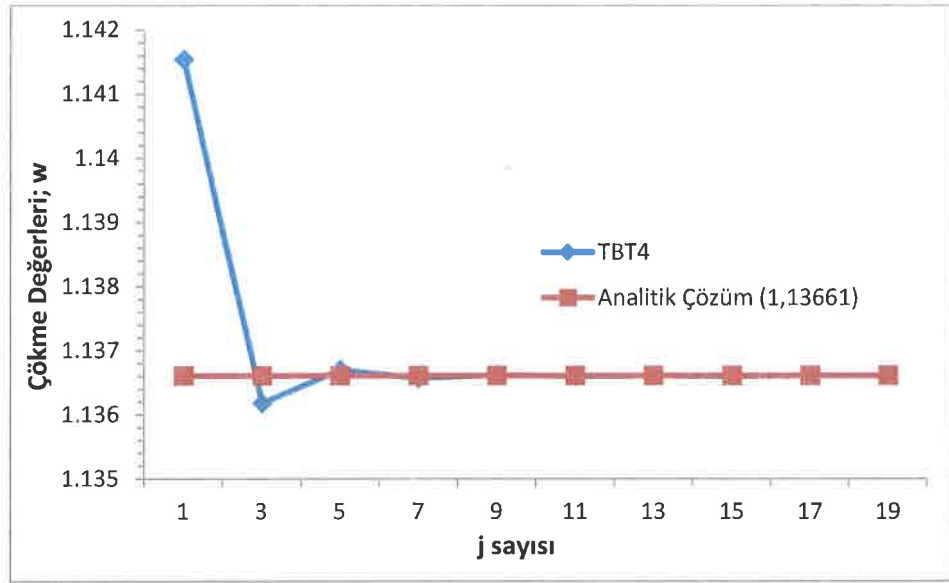


Şekil 4.4. EBT2 kirişi moment dağılım grafiği (L=12, h=1)

Şekil 4.4. de görüldüğü gibi EBT2 kirişi için bulunan farklı noktalardaki moment değerleri ile analitik çözüm sonucu elde edilen gerçek sonuçlar uyuşmaktadır.

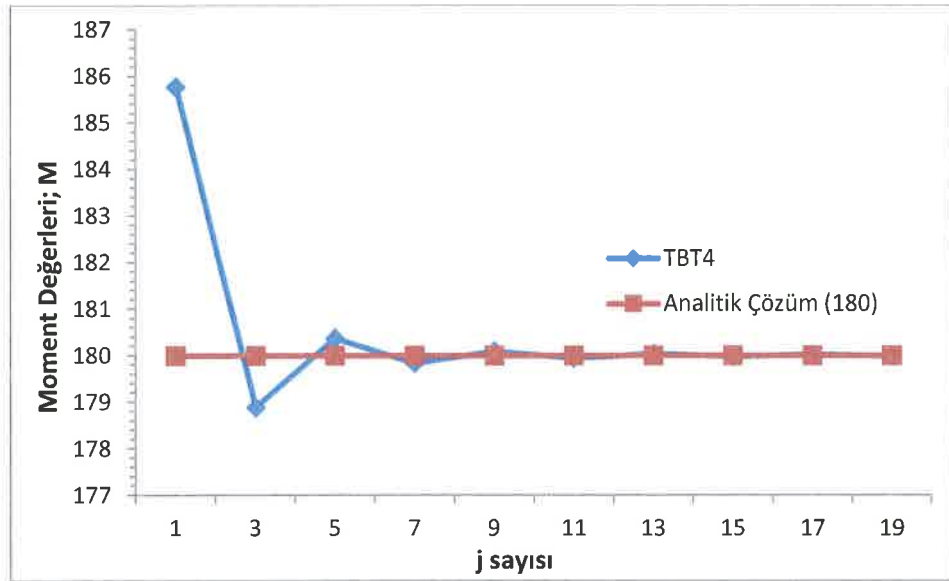
Timoshenko (TBT4) kirişleri için yapılan hesaplamalarda;

- ❖ j sayısının artırılması ile maksimum yer değiştirme, moment, kesme kuvveti ve dönme miktarlarının gerçek çözüm sonucuna nasıl yaklaştığı Şekil 4.5-4.8 de karşılaştırılarak gösterilmiştir,
- ❖ Farklı L/h oranlarına sahip kirişlerde maksimum yer değiştirme ve momentler elde edilerek benzer çalışma sonuçları ile karşılaştırılmıştır,
- ❖ Kiriş üzerinde farklı noktalardaki moment değerleri hesaplanarak analitik çözüm sonuçları ile karşılaştırılmıştır.



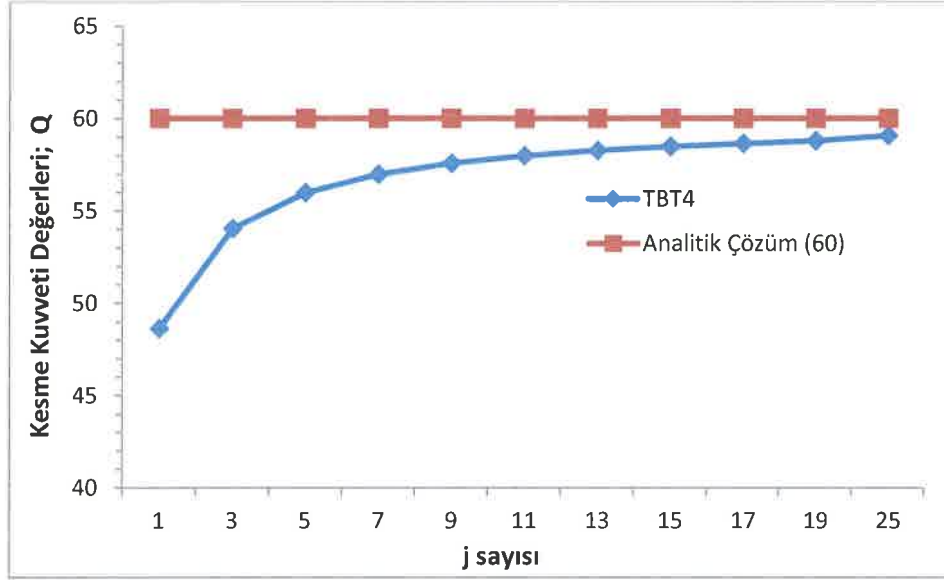
Şekil 4.5. TBT4 kirişi maksimum çökme için karşılaştırmalı yaklaşım testi ($L=12 / h=1$)

Şekil 4.5. de görüldüğü gibi TBT4 kirişi için bulunan maksimum çökme değerleri, j sayısının artması ile analitik çözüm sonucu elde edilen gerçek sonuçlarla $j=9$ sayısından itibaren uyumaktadır.



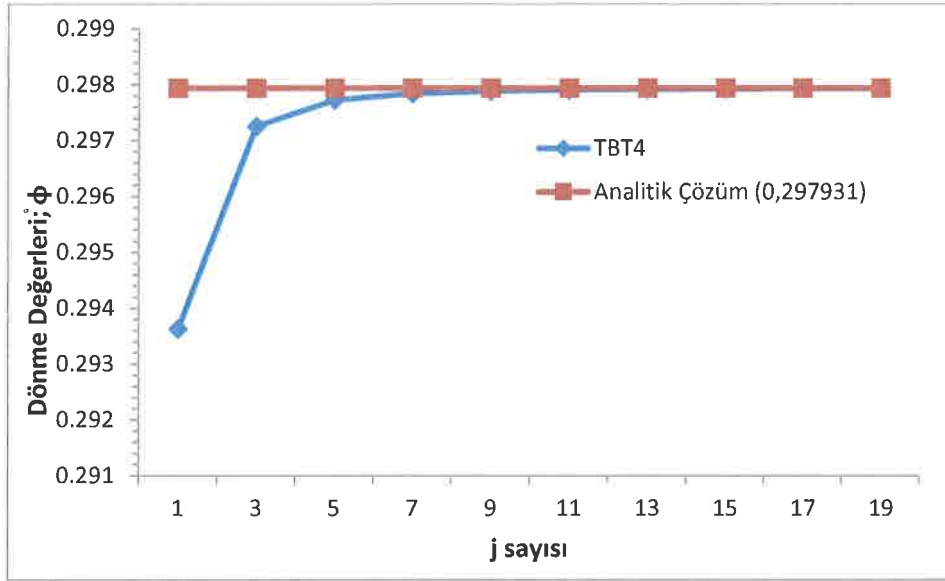
Şekil 4.6. TBT4 kirişi maksimum moment için karşılaştırmalı yaklaşım testi

Şekil 4.6. da TBT4 kirişi ortasındaki maksimum moment değerleri, EBT2 kirişinde elde edilen moment değerleri ile aynı değerler olup j sayısının artması ile analitik çözüm sonucu elde edilen gerçek sonuçlarla j=9 sayısından itibaren örtüşmektedir.



Şekil 4.7. TBT4 kirişi maksimum kesme kuvveti için karşılaştırmalı yaklaşım testi

Şekil 4.7. da TBT4 kirişinde kiriş uçlarındaki maksimum kesme kuvveti değerleri, j sayısının artması ile analitik çözüm sonucu elde edilen gerçek sonuçlarla % 1,56 bağıl hata ile j=25 sayısından itibaren örtüşmektedir.



Şekil 4.8. TBT4 kirişi maksimum dönme değeri için karşılaştırmalı yaklaşım testi

Şekil 4.8. de TBT4 kirişi uçlarındaki maksimum dönme değerleri, j sayısının artması ile analitik çözüm sonucu elde edilen gerçek sonuçlarla j=7 sayısından itibaren hemen hemen aynıdır.

TBT4 kirişi için farklı L/h oranları dikkate alınarak yapılan çözümlerde maksimum çökme, moment, kesme ve dönme değerlerinin literatürdeki sonuçlarla ve analitik çözümler sonucu elde edilen değerlerle karşılaştırması Çizelge 4.4.-Çizelge 4.9. da verilmiştir.

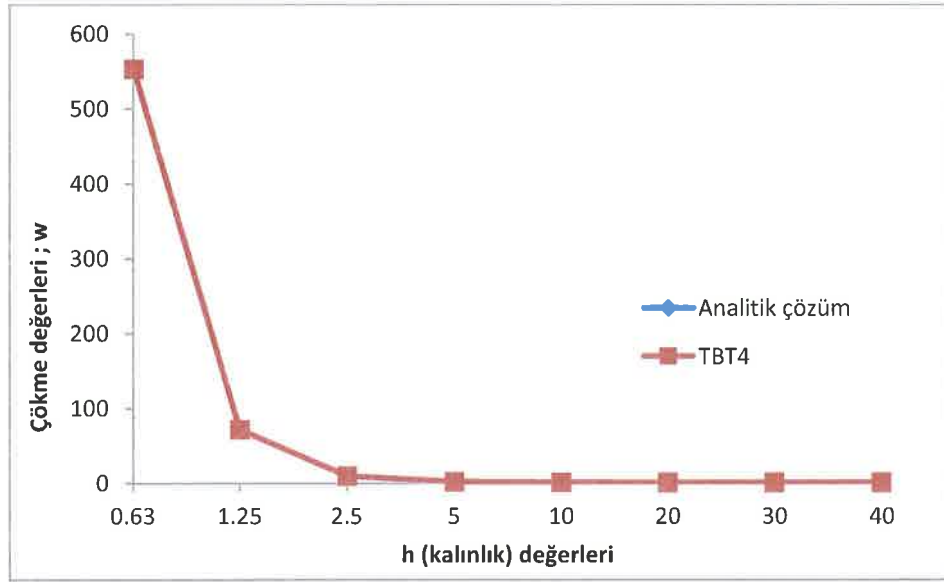
Çizelge 4.4. Basit mesnetli kalın TBT4 kirişlerin maksimum çökmesi (w)

Teori	Referans	Maksimum çökme (w) değerleri			
		L/h			
		12/12	40/12	80/12	160/12
TBT	TBT4	0.002261	0.09776	1.3489	20.7214
	Özütok ve Madenci	0.002261	0.09785	1.3500	20.7500
	Vo ve Thai	0.002261	0.09775	1.3489	20.7210
	Bickford	0.002260	0.09775	1.3488	20.7211

Çizelge 4.5. Basit mesnetli ince TBT4 kirişlerinin maksimum yer çökmesi (w)

Teori	Referans	Maksimum çökme (w) değerleri			
		L/h			
		12/1	40/1	80/1	160/1
TBT	TBT4	1.13662	138.147	2207.77	35,313.9
	Özütok ve Madenci	1.138	138.3	2210	35,360
	Bickford	1.136607	138.1462	2207.757	35,313.79

Çizelge 4.4. ve 4.5.'de görüldüğü gibi maksimum çökme değerleri, literatürdeki mevcut sonuçlarla hemen hemen aynı çıkmıştır.



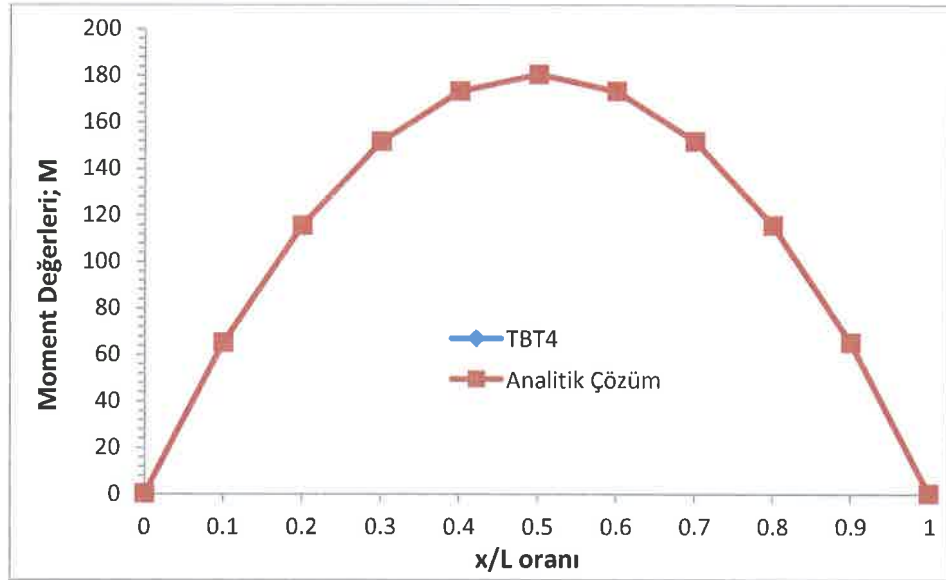
Şekil 4.9. TBT4 kirişi L sabit iken ve h değeri artarken çökme değişim grafiği

Şekil 4.9' da, TBT4 kirişlerinde L boyu sabit iken kiriş kalınlığı artırılarak elde edilen çökme değerleri ile analitik çözüm sonuçlarının karşılaştırmalı grafiği verilmiştir. Beklenen şekilde kiriş kalınlığı artarken analitik çözüm sonuçları ile de uyumlu olarak çökme değerlerinin azaldığı görülmüştür.

Çizelge 4.6. Basit mesnetli TBT4 kirişlerinin maksimum moment değeri (M)

Maksimum moment (M) değerleri					
Teori	Referans	L			
		12	40	80	160
TBT	TBT4	180.088	2000.98	8003.91	32015.6
	Analitik Çözüm	180	2000	8000	32000

Çizelge 4.6.'da görüldüğü gibi farklı boylardaki kirişlerde elde edilen moment değerleri ile analitik çözüm sonuçları ile hemen hemen aynıdır.



Şekil 4.10. TBT4 kirişi moment dağılım grafiği (L=12, h=1)

Şekil 4. 10. da görüldüğü gibi TBT4 kirişi için farklı noktalardaki moment değerleri ile analitik çözüm sonucu elde edilen gerçek sonuçlar uyuşmaktadır.

Çizelge 4.7. Basit mesnetli TBT4 kirişlerinin maksimum kesme kuvveti değeri (Q)

		Maksimum kesme (Q) değerleri			
Teori	Referans	L			
		12	40	80	160
TBT	TBT4	59.0652	196.884	393.768	787.536
	Analitik Çözüm	60	200	400	800

Çizelge 4.7.'de farklı boylardaki kirişler için elde edilen kesme kuvveti değerleri, analitik çözüm sonuçları ile karşılaştırmalı olarak gösterilmiştir.

Çizelge 4.8. Basit mesnetli kalın TBT4 kirişlerinin maksimum dönme değeri (ϕ)

		Maksimum dönme (ϕ) değerleri			
Teori	Referans	L/h			
		12/12	40/12	80/12	160/12
TBT	TBT4	0.00017236	0.0063837	0.05107	0.40855
	Analitik Çözüm	0.00017241	0.0063857	0.05108	0.40868

Çizelge 4.9. Basit mesnetli ince TBT4 kirişlerinin maksimum dönme değeri (ϕ)

		Maksimum dönme (ϕ) değerleri			
Teori	Referans	L/h			
		12/1	40/1	80/1	160/1
TBT	TBT4	0.297838	11.031	88.2484	705.987
	Analitik Çözüm	0.297331	11.0345	88.2759	706.207

Çizelge 4.8. ve 4.9 'da farklı L/h oranlarına sahip TBT4 kirişlerinin maksimum dönme değerleri, analitik çözüm sonuçları ile karşılaştırmalı olarak gösterilmiştir.

4.2. Dinamik Analiz

Bu kısımda iki ucu basit mesnetli, sabit kesit alanı olan, düzgün yayılı yük etkisi altındaki homojen ve izotropik Euler-Bernoulli (EBT2) ve Timoshenko (TBT4) kirişlerinin serbest titreşim frekansları incelenmiştir. Analizlerde elde edilen sayısal sonuçlar literatürde bulunan çalışma sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Analizler sonucunda elde edilen frekans değerleri EBT2 kirişleri için denklem (4.1) de, TBT4 kirişleri için ise denklem (4.2) de verilen formüller ile boyutsuz hale getirilmiştir.

$$\bar{\omega} = \omega L^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \quad (4.1)$$

$$\bar{\omega} = \omega L^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \sqrt{\frac{KGh + \left(\frac{j\pi}{L}\right)^2 EI}{KGh}} \quad (4.2)$$

EBT2 ve TBT4 kirişlerine ait serbest titreşim frekanslarının ilk 5 mod değeri analitik çözüm sonuçları ile karşılaştırılarak Çizelge 4.10. 'da verilmiştir.

Çizelge 4.10. Basit mesnetli EBT2 ve TBT4 kirişleri serbest titreşim frekansları karşılaştırması
(E=25; G=10; K=5/6; ν= 0,25; ρ=1; L/h =10)

EBT2 ve TBT4 kirişleri serbest titreşim frekansı ve karşılaştırması (ω)					
L/h=10	Mod 1	Mod 2	Mod 3	Mod 4	Mod 5
EBT2	0,142427	0,569708	1,28184	2,27883	3,56067
Analitik Çözüm	0,142427	0,569708	1,28184	2,27883	3,56067
TBT4	0,140729	0,543626	1,15978	1,92995	2,80081
Analitik Çözüm	0,140729	0,543626	1,15978	1,92995	2,80081

Yapılan analiz sonuçlarında EBT2 kirişleri için elde edilen serbest titreşim değerleri (4.1), TBT4 kirişleri için elde edilen değerler ise denklem (4.2) kullanılarak boyutsuz hale getirilmiş Çizelge 4.11 'de analitik sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Çizelge 4.11. Basit mesnetli EBT2 ve TBT4 kirişleri boyutsuz serbest titreşim frekansları karşılaştırması

EBT2 ve TBT4 kirişleri boyutsuz serbest titreşim frekansı vekarşılaştırması($\bar{\omega}$)

L/h=10	Mod 1	Mod 2	Mod 3	Mod 4	Mod 5
EBT2	9,8696	39,4784	88,8264	157,914	246,74
TBT4	9,8696	39,4784	88,8264	157,914	246,74
Analitik Çözüm	9,8696	39,4784	88,8264	157,914	246,74

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada basit mesnetli, düzgün yayılı yük etkisinde ve sabit kesit geometrisine sahip, ortotropik Euler-Bernoulli ve Timoshenko kirişlerinin statik ve dinamik analizleri yapılmıştır. Enerji prensiplerinden virtüel yer değiştirme ilkesi kullanılarak her iki kiriş teorisine ait denge denklemleri, kinematik denklemler ve bünye bağıntıları elde edilmiştir. Varyasyonel işlemler yapılarak dinamik ve geometrik sınır koşullarını da içeren bu alan denklemleri operatör forma dönüştürülmüştür. Bu operatör forma Gâteaux türevi kullanılarak, her iki kiriş teorisine ait dinamik ve geometrik sınır koşullarını içeren fonksiyoneller elde edilmiştir. Fonksiyonellerin çözümünde Ritz metodu kullanılmıştır. Euler-Bernoulli kiriş teorisi için eğilme momenti ve çökmenin bilinmeyen olarak tanımlandığı EBT2, Timoshenko kiriş teorisi için eğilme momenti, çökme, kesme kuvveti ve dönmenin bilinmeyen olarak tanımlandığı TBT4 kiriş elemanları elde edilmiştir. Ritz yöntemi uygulanırken fonksiyonelde bilinmeyen ve analiz sonucunda doğrudan elde edilecek olan eğilme momenti, yer değiştirme, kesme kuvveti ve dönme değerleri problemin geometrik ve dinamik sınır koşullarını sağlayan trigonometrik şekil fonksiyonları ile ifade edilmiştir. Elde edilen sistem matrislerin çözümü bir bilgisayar programında yapılan kodlama ile yapılmıştır. Statik ve dinamik analizler için sayısal uygulamalar yapılarak sonuçları literatürde bulunan benzer çalışma sonuçları ile karşılaştırılmış ve sonuçların birbirine çok yakın çıktığı görülmüştür.

Çalışmanın verimliliği yönünden sonuçlar özetlendiğinde; literatürdeki benzer çalışmalardan farklı olarak Euler-Bernoulli kirişleri için eğilme momenti ve yer değiştirme değerleri; Timoshenko kirişleri için eğilme momenti, yer değiştirme, kesme kuvveti ve dönme değerleri trigonometrik şekil fonksiyonları kullanılarak Ritz yöntemi ile doğrudan elde edilmiştir. Bu sonuçların literatürdeki sonuçlarla başarılı bir şekilde örtüştüğü görülmüştür. Kirişlerin uzunluk-yükseklik oranına göre maksimum çökme değerleri incelenmiş, kiriş yüksekliği arttıkça maksimum çökmenin azaldığı gözlemlenmiştir. Kesme etkilerinin dikkate alınması ile beklenen bir sonuç olarak Timoshenko kiriş teorisine dayalı kirişlerde Euler-Bernoulli kiriş teorisine dayalı kirişlerden daha çok çökme olduğu görülmüştür.

Dinamik analizlerde, Timoshenko kiriş teorisine dayalı kirişlerde elde edilen serbest titreşim frekanslarının Euler-Bernoulli kiriş teorisine dayalı kirişlerde elde edilen serbest titreşim frekanslarından daha düşük çıktığı gözlemlenmiştir.

Bu çalışmanın devamı olarak farklı mesnet koşulları için çözümler yapılarak çalışmalara devam edilmesi düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

- Aköz A. Y., Çubuklar için yeni enerji fonksiyonelleri ve uygulamaları, V. Ulusal Mekanik Kongresi, İTÜ, 1985.
- Aköz A. Y., Kadioğlu F., The mixed finite element solution of circular beam on elastic foundation, *Computers & Structures*, 60 (4), 643-651, 1996.
- Aköz A. Y., Kadioğlu F., The mixed finite element method for the quasi-static and dynamic analysis of viscoelastic Timoshenko beams, *International Journal For Numerical Method in Engineering*, 44, 1909-1932, 1999.
- Aköz A. Y., Omurtag M. H., Doğruoğlu A. N., The mixed finite element formulation for three dimensional bars, *Int. J. Solids Structures*, 28, 225-234, 1991.
- Aköz A. Y., Özütok A., A functional for shells of arbitrary geometry and a mixed finite element method for parabolic and circular cylindrical shells, *International Journal For Numerical Method in Engineering*, 47, 1933-1981, 2000.
- Aköz A. Y., Uzcan N., The new functional for Reissner plates and its application, *Computers & Structures Vol. 44 (5)*, 1139-1144, 1992.
- Aksencer T., 2018, Katmanlı kompozit dönen kiriş ve plak yapıların dinamik analizi, *Yüksek Lisans Tezi*, Trakya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Edirne.
- Armenakas A. E., Gazis D. C., Hermann G., Free vibrations of circular cylindrical shells, *Pergamon Press*, Oxford, UK 1969.
- Arıbas Ü. N., Yılmaz M., Eratlı N., Omurtag M. H., Static and free vibration analysis of planar curved composite beams on elastic foundation, *International Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, Vol. 2, 2017.
- Arslan A., 2004, Varyasyonel türev yöntemi ile Euler-Bernoulli kirişlerinin çözümü, *Yüksek Lisans Tezi*, Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.
- Aydogdu M., A new shear deformation theory for laminated composite plates, *Composite Structures*, 89 (1), 94-101, 2009.
- Aydogdu M., Vibration analysis of cross-ply laminated beams with general boundary conditions by Ritz method, *International Journal of Mechanical Sciences*, 47, 1740-1755, 2005.
- Cheung Y. K., Zhou D., The free vibrations of tapered rectangular plates using a new set of beam functions with the Rayleigh-Ritz method, *Journal of Sound Vibration*, 223 (5), 703-722, 1999.
- Cowper G. R., The shear coefficient in Timoshenko's beam theory, *ASME J. Appl. Mech.*, 33, 335-340, 1966.

- Çoban M., 2008, Daire eksenli kirişlerin karışık sonlu elemanlar yöntemi ile dinamik analizi, *Yüksek Lisans Tezi*, İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Eratlı N., Aköz A. Y., Free vibration analysis of Reissner plates by mixed finite element, *Structural Engineering and Mechanics*, 13 (2), 277-298, 2002.
- Eratlı N., Aköz A. Y., Mixed finite element formulation for folded plates, *Structural Engineering and Mechanics*, 13 (2), 155-170, 2002.
- Eratlı N., Aköz A. Y., The mixed finite element formulation for the thick plates on elastic foundations, *Computers and Structures*, 65 (4), 515-529, 1997.
- Gürlek M. E., 2018, Tabakalı kompozit kirişlerin sonlu farklar metodu ile analizi, *Yüksek Lisans Tezi*, Dumlupınar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kütahya.
- Heyliger P.R., Reddy J. N., Eftekhari S.A., A higher order beam finite element for bending and vibration problems, *Journal of Sound and Vibration* 126 (2), 309-326, 1988.
- İlhan N., 2003, Nokta mesnetli kiriş, plak ve dairesel silindirik kabukların serbest titreşimlerinin Ritz yöntemiyle incelenmesi , *Yüksek Lisans Tezi*, Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- İyidoğan C., 2008, Çapraz tabakalı kompozit daire eksenli kirişlerin dinamik analizi, *Yüksek Lisans Tezi*, İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Khalili S.M.R., Jafari A. A., Eftekhari S. A., A mixed Ritz-DQ method for forced vibration of functionally graded beams carrying moving loads, *Composite Structures* 92, 2497-2511, 2010.
- Madenci E., 2011, Kompozit kirişlerin karışık sonlu elemanlar yöntemi ile statik ve dinamik analizi, *Yüksek Lisans Tezi*, Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.
- Mantari J. L., Canales F. G., Free vibration and buckling of laminated beams via hybrid Ritz solutions for various penalized boundary conditions, *Composite Structures* 152, 306-315, 2016.
- Nguyen N. D., Nguyen T. K., Nguyen T. N., Thai H. T., New Ritz-solution shape functions for analysis of thermo-mechanical buckling and vibration of laminated composite beams, *Composite Structures* 184, 452-460, 2018.
- Nguyen N. D., Nguyen T. K., Thai H. T., Vo T. P., A Ritz type solutions with exponential trial functions for laminated composite beams based on the modified couple stress theory, *Composite Structures* 191, 154-167, 2018.
- Nguyen T. K., Nguyen N. D., Vo T. P., Thai H. T., Trigonometric-series solution for analysis of laminated composite beams, *Composite Structures* 160, 142-151, 2017.

Oden J. T., Reddy J. N., Variational methods in theoretical mechanics, *Springer-Verlag*, Second Edition, Berlin Heidelberg New York, 1983.

Omurtag, M. H., Mukavemet, *Birsen Yayınevi*, Cilt 2, 3.Baskı, İstanbul, 2012.

Özütok A., 1999, Genel kabuklara ait fonksiyonel ve parabolik silindir kabuklar için karma sonlu eleman formülasyonu, *Doktora Tezi*, İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

Özütok A., Madenci E., Static analysis of laminated composite beams based on higher-order shear deformation theory by using mixed-type finite element method, *International Journal of Mechanical Sciences*, 130, 234-243, 2017.

Özütok A., Madenci E., Kadioğlu F., Free vibration analysis of angle-ply laminate composite beams by mixed finite element formulation using the Gâteaux differential, *Sci Eng Compos Mater*, 21, 257-266, 2014.

Pradhan K. K., Chakraverty S., Free vibration of Euler and Timoshenko functionally graded beams by Rayleigh-Ritz method, *Composites, Part B* 51, 175-184, 2013.

Reddy J. N., A simple higher-order theory for laminated composite plates, *Journal of applied mechanics*, 51 (4), 745-752, 1984.

Reddy J. N., *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: theory and analysis*, Second Editions, *CRC Press*, Boca Rotan, 2004.

Satır N., 2011, Çapraz tabakalı kompozit dikdörtgen plakların dinamik analizi, *Yüksek Lisans Tezi*, İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

Shi D., Zhang H., Wang Q., Zha S., Free and forced vibration of the moderately thick laminated composite rectangular plate on various elastic Winkler and Pasternak foundations, *Shock and Vibration*, 7820130, 2017.

Vo T. P., Thai H. T., Vibration and buckling of composite beams using refined shear deformation theory, *International Journal of Mechanical Sciences* 62, 67-76, 2012.

Vo T. P., Thai H. T., Nguyen T. K., Lanc D., Karamanli A., Flexural analysis of laminated composite and sandwich beams using a four-unknown shear and normal deformation theory, *Composite Structures* 176, 388-397, 2017.

Vo T. P., Thai H. T., Static behavior of composite beams using various refined shear deformation theories, *Composite Structures* 94, 2513-2522, 2012.

Xu R., Wu Y., Static, dynamic and buckling analysis of partial interaction composite members using Timoshenko's beam theory, *International Journal of Mechanical Sciences*, 49, 1139-1155, 2007.

Yazıcı E., 2009, Elastik zemine oturan Timoshenko kirişinin sonlu elemanlar yöntemiyle elastoplastik analizi, *Yüksek Lisans Tezi*, İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

Zhen W., Wanji C., An assessment of several displacement-based theories for the vibration and stability analysis of laminated composite and sandwich beams, *Composite Structures* 84, 337-349, 2008.

Zhou D., Free vibration of multi-span Timoshenko beams using static Timoshenko beam functions, *Journal of Sound and Vibration*, 241 (4), 725-734, 2001.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : KÜBRA ERDEM
Doğum Yeri ve Tarihi : 01.08.1993 KONYA

Eğitim Durumu

Lisans Öğrenimi : Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi / İnşaat Mühendisliği
Bildiği Yabancı Diller : İngilizce
Bilimsel Faaliyetleri : 6.Geoteknik Sempozyumu Bildiri Sunumu

İş Deneyimi

Stajlar : Altunay İnş. San. ve Tic. Ltd. Şti
Projeler : Hasan Kulu KYK Yurt Projesi, Sarveliler K.S.S.
Çalıştığı Kurumlar : Altunay İnş. San. ve Tic. Ltd. Şti.

İletişim

E-Posta Adresi : kubraerdem42@gmail.com
Tarih : 05.07.2019