



**KTO KARATAY ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI
TEZLİ YÜKSEK LİSANS PROGRAMI**

**YEREL OLMAYAN FORMÜLASYON İLE EULER-BERNOULLİ VE
TİMOSHENKO KİRİŞİNİN EĞİLME ANALİZİ VE KARIŞIK SONLU
ELEMENLAR YÖNTEMİ**

Miyase Gökçe BALIKÇILAR

Yüksek Lisans Tezi

**KONYA
Ağustos 2021**

YEREL OLMAYAN FORMÜLASYON İLE EULER-BERNOULLİ VE
TİMOSHENKO KİRİŞİNİN EĞİLME ANALİZİ VE KARIŞIK SONLU
ELEMENLAR YÖNTEMİ

Miyase Gökçe BALIKÇILAR

KTO Karatay Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı
Tezli Yüksek Lisans Programı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Atilla ÖZÜTOK

Konya
Ağustos 2021

BİLDİRİM

Enstitü tarafından onaylanan Yüksek Lisans tezimin tamamını veya herhangi bir kısmını basılı veya dijital biçimde arşivleme ve aşağıda belirtilen koşullar dahilinde erişime açma iznini KTO Karatay Üniversitesine verdiğimi bildiririm. Bu izinle, Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet haklarım bende kalacak ve gelecekteki çalışmalar (makale, kitap, lisans, patent vb.) için tezimin tamamının veya bir bölümünün kullanım hakları yalnızca bana ait olacaktır.

Tezimin bütünüyle kendi çalışmam olduğunu, başkalarının haklarını ihlal etmediğimi ve tezimin tek yetkili sahibi olduğumu beyan ve taahhüt ederim. Telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izinle kullanılması zorunlu olan kaynakları, yazılı izin alarak kullandığımı ve istenildiğinde izinlerin suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederim.

Yükseköğretim Kurulu tarafından yayımlanan “Lisansüstü Tezlerin Elektronik Ortamda Toplanması, Düzenlenmesi ve Erişime Açılmasına İlişkin Yönerge” kapsamında, tezim, aşağıda belirtilen koşullar haricince, YÖK Ulusal Tez Merkezi ve KTO Karatay Üniversitesi Açık Erişim Sisteminde erişime açılır.

Enstitü / Fakülte Yönetim Kurulu kararı ile tezimin erişime açılması mezuniyet tarihimden itibaren 2 yıl ertelenmiştir.¹

Enstitü / Fakülte Yönetim Kurulunun gerekçeli kararı ile tezimin erişime açılması mezuniyet tarihimden itibaren ... ay ertelenmiştir.²

Tezimle ilgili gizlilik kararı verilmiştir.³⁴

27 Ağustos 2021

Miyase Gökçe BALIKÇILAR

¹ MADDE 6(1) Lisansüstü teze ilgili patent başvurusu yapılması veya patent alma sürecinin devam etmesi durumunda, tez danışmanının önerisi ve enstitü anabilim dalının uygun görüşü üzerine enstitü veya fakülte yönetim kurulu iki yıl süre ile tezin erişime açılmasının ertelenmesine karar verebilir.

² MADDE 6(2) Yeni teknik, materyal ve metotların kullanıldığı, henüz makaleye dönüşmemiş veya patent gibi yöntemlerle korunmamış ve internetten paylaşılması durumunda 3. şahıslara veya kurumlara haksız kazanç imkanı oluşturabilecek bilgi ve bulguları içeren tezler hakkında tez danışmanının önerisi ve enstitü anabilim dalının uygun görüşü üzerine enstitü veya fakülte yönetim kurulunun gerekçeli kararı ile altı ay aşmamak üzere tezin erişime açılması engellenebilir.

³ MADDE 7(1) Ulusal çıkarları veya güvenliği ilgilendiren, emniyet, istihbarat, savunma ve güvenlik, sağlık vb. konulara ilişkin lisansüstü tezlerle ilgili gizlilik kararı, tezin yapıldığı kurum tarafından verilir. Kurum ve kuruluşlarla yapılan işbirliği protokolü çerçevesinde hazırlanan lisansüstü tezlere ilişkin gizlilik kararı ise, ilgili kurum ve kuruluşun önerisi ile enstitü veya fakültenin uygun görüşü üzerine üniversite yönetim kurulu tarafından verilir. Gizlilik kararı verilen tezler Yükseköğretim Kuruluna bildirilir.

⁴ MADDE 7(2) Gizlilik kararı verilen tezler gizlilik süresince enstitü veya fakülte tarafından gizlilik kuralları çerçevesinde muhafaza edilir, gizlilik kararının kaldırılması halinde Tez Otomasyon Sistemine yüklenir.

ETİK BEYAN

KTO Karatay Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Tez Hazırlama ve Yazım Kurallarına uygun olarak Prof. Dr. Atilla ÖZÜTOK danışmanlığında tarafımdan üretilen bu tez çalışmasında; sunduğum tüm veri, enformasyon, bilgi ve belgeleri bilimsel etik kuralları çerçevesinde elde ettiğimi, tüm değerlendirme, analiz, bulgu ve sonuçları bilimsel usullere uygun olarak sunduğumu, tez çalışmasında yararlandığım kaynakların tümüne bilimsel normlara uygun biçimde atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi, tezimin kaynak gösterilen durumlar dışında özgün olduğunu bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim..

27 Ağustos 2021

Miyase Gökçe BALIKÇILAR

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimimin başlangıcından sonuçlandırına kadar her zaman destek olan, bilgi ve tecrübelerini esirgemeyen, başarıya ulaşmam için sürekli teşviklerde ve katkıda bulunan sayın hocam Prof. Dr. Atilla ÖZÜTOK'a sevgi ve saygı ile teşekkürlerimi sunarım. Desteklerini, ilgi ve yardımlarını gördüğüm bölüm hocalarıma, arkadaşlarıma ve aileme ayrı ayrı teşekkür ederim.

Ağustos, 2021

Miyase Gökçe BALIKÇILAR

ÖZET

Miyase Gökçe BALIKÇILAR

Yerel Olmayan Formülasyon ile Euler-Bernoulli ve Timoshenko Kirişinin Eğilme

Analizi ve Karışık Sonlu Elemanlar Yöntemi

Yüksek Lisans Tezi

Konya, 2021

Bu çalışmada, Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş teorileri yerel olmayan elastisite teorisiyle birlikte ele alınmıştır. Enerji prensiplerinden virtüel yer değiştirme ilkesi kullanılarak yerel olmayan kiriş teorilerine ait denge denklemleri ve bünye bağlantıları elde edilmiştir. Varyasyonel işlemler yapılarak dinamik ve geometrik sınır koşullarını da içeren alan denklemleri operatör forma dönüştürülmüştür. Bu operatör forma Gâteaux diferansiyeli yaklaşımı kullanılarak, her iki yerel olmayan kiriş teorisine ait dinamik ve geometrik sınır koşullarını içeren fonksiyonel elde edilmiştir. Bu fonksiyonellere sonlu elemanlar yöntemi uygulanarak yerel olmayan teori için kiriş eleman matrisleri elde edilmiştir. Elde edilen eleman matrisleri ile değişik mesnet koşullarına sahip kirişlerin statik analizi yapılmıştır. Sonuçlar literatürde bulunan benzer çalışma sonuçları ile karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler

Yerel olmayan elastisite teorisi, Euler-bernoulli kiriş teorisi, Timoshenko kiriş teorisi, Gâteaux diferansiyeli, sonlu elemanlar metodu, virtüel iş ilkesi.

ABSTRACT

Miyase Gökçe BALIKÇILAR

Bending Analysis of Euler-Bernoulli and Timoshenko Beam with Nonlocal Formulation
and Mixed Finite Element Method

Master's Thesis

Konya, 2021

In this study, the Euler-Bernoulli and Timoshenko beam theories were taken up together with the nonlocal elasticity theory. Balance equations and structure connections of beam theory were obtained using the principle of virtual displacement from energy principles. These field equations, including dynamic and geometric boundary conditions, have been converted to operator form by doing variational operations. Using the Gâteaux differential approach to this operator form, a functional involving the dynamic and geometric boundary conditions of both nonlocal beam theories have been obtained. By applying the finite element method to these functionals, beam element matrices are obtained for the nonlocal theory. Static analysis of beams with different support conditions was made with the obtained element matrices. The results were compared with the results of similar studies found in the literature.

Keywords

Nonlocal elasticity, Euler-Bernoulli beam theory, Timoshenko beam theory, Gâteaux differential method, finite element method, the principle of virtual.

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	i
BİLDİRİM	ii
ETİK BEYAN.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
ÖZET.....	v
ABSTRACT.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
TABLolar DİZİNİ	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	x
SİMGELER DİZİNİ.....	xii
KISALTMALAR DİZİNİ.....	xiv
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ARAŞTIRMASI	4
3. MATERYAL VE METOD	8
3.1. Enerji İlkeleri.....	8
3.1.1. Virtüel İş İlkesi	8
3.1.2. Virtüel Yer Değiştirme İlkesi	9
3.2. Değişim Ve Euler Denklemi (Varyasyon)	10
3.3. Kiriş Teorileri	15
3.3.1. Euler-Bernoulli Kiriş Teorisi (EBT).....	15
3.3.2. Timoshenko Kiriş Teorisi (TBT).....	17
3.4. Yerel Olmayan Elastisite Teorisi ve Fonksiyonel	19
3.4.1. Yerel Olmayan Elastisite Teorisi.....	19
3.4.2. Alan Denklemleri ve Fonksiyonellerin Elde Edilmesi	21
3.5. Sonlu Elemanlar Yöntemi (FEM)	24
3.5.1. Şekil Fonksiyonları.....	24
4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI	28
4.1. Basit Mesnetli Kiriş (SS).....	28
4.2. Ankastre Kiriş (CC).....	38
4.3. Bir Ucu Ankastre Bir Ucu Serbest Kiriş (CF).....	41
4.4. SS, CC Ve CF'nin Karşılaştırılması.....	44
5. SONUÇ	50

KAYNAKLAR	53
ÖZGEÇMİŞ	57

TABLÖLAR DİZİNİ

Tablo 4.1. NEBT4 kirişi farklı L/h oranları için maksimum boyutsuz çökme ve moment değerleri	30
Tablo 4.2. NEBT kirişi için literatürde bulunan maksimum boyutsuz çökme değerleri	31
Tablo 4.3. NTBT8 kirişi farklı L/h oranları için elde edilen maksimum boyutsuz çökme değerleri.....	33
Tablo 4.4. NTBT8 $L/h = 100$ için maksimum boyutsuz çökme değerleri.....	34
Tablo 4.5. NTBT8 kirişi için elde edilen maksimum dönme değerleri	49

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1. Fonksiyonların değişimi.....	11
Şekil 3.2. Şekil fonksiyonu için koordinat takımı.....	25
Şekil 4.1. NEBT4 kirişi farklı L/h oranları için maksimum boyutsuz çökme [$\bar{w} = -w * 10^2 (EI / q_0 L^4)$] değerleri	29
Şekil 4.2. NEBT4 kirişi ve Reddy (2007) maksimum boyutsuz çökme değerleri.....	30
Şekil 4.3. NTBT8 kirişi farklı L/h oranları için maksimum boyutsuz çökme değerleri	32
Şekil 4.4. NTBT8 kirişi ve Reddy (2007)'nin $L/h = 100$ için maksimum boyutsuz çökme değerleri.....	33
Şekil 4.5. NTBT8 kirişi ve Reddy (2007)'nin $L/h = 20$ için maksimum boyutsuz çökme değerleri.....	34
Şekil 4.6. NTBT8 kirişi ve Reddy (2007)'nin $L/h = 10$ için maksimum boyutsuz çökme değerleri.....	35
Şekil 4.7. NEBT4, NTBT8 kirişi ve Reddy (2007)'nin $L/h = 100$ için maksimum boyutsuz çökme değerleri	36
Şekil 4.8. NEBT4, NTBT8 kirişi ve Reddy (2007)'nin $L/h = 20$ için maksimum boyutsuz çökme değerleri	36
Şekil 4.9. NEBT4, NTBT8 kirişi ve Reddy (2007)'nin $L/h = 10$ için maksimum boyutsuz çökme değerleri	37
Şekil 4.10. NTBT8 kirişi için maksimum boyutsuz dönme değerleri	38
Şekil 4.11. NEBT4 kirişi farklı L/h oranları için maksimum boyutsuz çökme değerleri	39
Şekil 4.12. NTBT8 kirişi farklı L/h oranları için maksimum boyutsuz çökme değerleri	40
Şekil 4.13. NTBT8 kirişi için maksimum boyutsuz dönme değerleri	41
Şekil 4.14. NEBT4 kirişi farklı L/h oranları için maksimum boyutsuz çökme değerleri	42
Şekil 4.15. NTBT8 kirişi farklı L/h oranları için maksimum boyutsuz çökme değerleri	43
Şekil 4.16. NTBT8 kirişi için maksimum boyutsuz dönme değerleri	44
Şekil 4.17. NEBT4 kirişi farklı L/h oranları için maksimum boyutsuz çökme değerleri	45
Şekil 4.18. NEBT4 kirişi farklı L/h oranları için maksimum boyutsuz moment değerleri.....	46
Şekil 4.19. NTBT8 kirişi $L/h = 100$ için maksimum boyutsuz çökme değerleri.....	47

Şekil 4.20 NTBT8 kirişi $L/h = 20$ için maksimum boyutsuz çökme değerleri.....	47
Şekil 4.21. NTBT8 kirişi $L/h = 10$ için maksimum boyutsuz çökme değerleri.....	48
Şekil 4.22. NTBT8 kirişi farklı L/h oranları için boyutsuz maksimum dönme değerleri	49

SİMGELER DİZİNİ

Simge	Açıklama
\underline{u}	Yer değiştirme vektörü
\underline{t}	Yüzey kuvveti
σ_{ij}	Gerilme tensörü
δ_u	Virtüel yer değiştirme
ε_{ij}	şekil değiştirme tensörü
$\delta\varepsilon_{ij}$	Virtüel şekil değiştirme
δU	İç kuvvetlerin virtüel işi
δW	Dış kuvvetlerin virtüel işi
$I(y)$	Fonksiyonel
\mathcal{E}	Küçük bir parametre
$\eta(x)$	Sürekli bir fonksiyon
Q	Operatör
τ	Skaler bir büyüklük
$R, M,$	Dinamik sınır koşulları
Ω, u	Geometrik sınır koşulları
w	Enine yer değiştirme
δw	Virtüel yer değiştirme
M_x	Eğilme momenti
A	Kesit alanı
q	Yayılı yük
h	Kiriş kalınlığı
L	Kiriş uzunluğu
ϕ	Dönme
γ_{xz}	Kayma açısı
$t(x')$	Makroskopik tensör
τ_{xz}	Kayma gerilmesi
Q_x	Kesme kuvveti

$K x'-x $	Yerel olmayan modül
τ	Malzeme sabiti
C	Elastikiyet tensörü
e_0	Boyutsuz bir malzeme sabiti
a	İç karakteristik uzunluğu
μ	Yerel olmayan elastisite parametresi
G	Kayma modülü
ξ	Doğal koordinat takımı
ψ	Şekil fonksiyonu
$[k]$	Eleman matrisi
E	Elastisite modülü

KISALTMALAR DİZİNİ

Kısaltma	Açıklama
EBT	Euler-Bernoulli Kiriş Teorisi
CC	İki ucu ankastre mesnetli kiriş (Clamped-Clamped)
CF	Bir ucu ankastre bir ucu serbest mesnetli kiriş (Clamped-Free)
FEM	Sonlu elemanlar yöntemi
TBT	Timoshenko Kiriş Teorisi
GD	Gâteaux Diferansiyel Metodu
NEBT4	Yerel olmayan Euler-Bernoulli Kirişi sonlu eleman matrisi
NTBT8	Yerel olmayan Timoshenko Kirişi sonlu eleman matrisi
SS	İki ucu basit mesnetli kiriş (Simply-Supported)

1. GİRİŞ

Son yıllarda, yüksek teknoloji yapılarında nanoteknolojinin ortaya çıkması boyut etkilerinden önemli ölçüde etkilenen küçük ölçekli yapıların mekanik davranışlarının doğru bir şekilde anlaşılması gerekmektedir. Genel olarak klasik süreklilik teorilerinin çoğu, bir noktadaki gerilme o noktada şekil değiştirmelerin fonksiyonları olduğunu varsayan hiperelastik bünye bağıntılarına dayanmaktadır. Klasik teori ile bünye denkleminde iç malzeme uzunluğu ölçeğinin olmaması yüzünden, nanoyapıların davranışını tahmin etmek zordur. Klasik elastisite teorisinin nano boyuttaki elemanların analizinde kullanılamaması bilim insanlarını başka bir teoriye yönlendirmiştir. Nanoyapılarda bu etkileri yakalamak için atomistik ve sürekli ortam mekaniği olmak üzere iki farklı yaklaşım önerilmiştir. Atomistik yaklaşımla karşılaştırıldığında, sürekli ortam mekaniği yaklaşımı hesaplama verimliliği ve basitliği nedeniyle yaygın olarak kullanılmaktadır. Boyuta bağlı etkiyi dikkate almak için yerel olmayan teori, şekil değiştirme gradyan teorisi, modifiye olmuş gerilme teorisi gibi sürekli ortam mekaniği kullanılmıştır. Bunlar içerisinde klasik elastisite teorisinin yetersiz olduğu durumları ortadan kaldırmak için geliştirilmiş yerel olmayan elastisite teorisi olarak adlandırılan bu yöntem küçük boyutlu elemanlara uygulanabilir olması ve kabul edilebilir sonuçlar vermesi bakımından büyük ilgi uyandırmıştır.

Klasik elastisite teorisinde herhangi bir noktadaki gerilme sadece o noktadaki şekil değiştirmenin fonksiyonu olarak ele alınır. Yerel olmayan elastisite teorisinde sürekli ortam içindeki bir noktadaki gerilme, sadece o noktadaki şekil değiştirmenin değil, cismin tüm noktadaki şekil değiştirmenin bir fonksiyonu olarak tanımlanmaktadır.

Klasik elastisite teorisi ve yerel olmayan elastisite teorisi formülasyonları arasındaki tek fark bünye denklemleridir. Yerel olmayan sürekli ortam mekaniğinin kullanımı, kırılma mekaniği, elastik dalgaların dağılımı, kompozitlerde dalga yayılımı ve akışkanlarda yüzey gerilimini içeren birçok alanda başarılı uygulamalar bulmuştur.

Yerel olmayan elastisite teorisi ilk olarak Eringen (1972,1983,2002) ve Eringen-Edelen (1972) tarafından bilim dünyasına sunulmuştur.

Birçok araştırmacı tarafından yerel olmayan elastisite kavramı küçük ölçekli kiriş, plak ve kabuk gibi elemanların fiziksel, mekanik ve diğer özelliklerinin anlaşılmasına

yoğunlaşmış ve bu nano ölçekli yapıların eğilme, titreşim ve burkulma analizleri ele alınmıştır. Yerel olmayan elastisite teorisinin klasik elastisite teorisine göre üstünlüğü gösterilmiştir.

Yerel olmayan elastik nano yapıların yapısal analizinde ortaya çıkan temel diferansiyel denklemleri çözmek için Navier Yöntemi (Pradhan ve diğ. 2009), Diferansiyel Quadrature Method (Pradhan ve diğ. 2009) ve Sonlu Elemanlar yöntemleri (Nguyen ve diğ. 2015) kullanılmıştır.

Sonlu elemanlar yönteminin daha karmaşık geometri, malzeme özelliği, sınır ve yükleme koşullarını etkin bir şekilde ele alabildiği iyi bilinmektedir. Diferansiyel denklem verildiği zaman buna karşı gelen fonksiyonelin bulunması için kullanılan yöntemler arasında varyasyonel formülasyon, ağırlıklı formülasyon ve Gâteaux türevi bulunmaktadır. Son yıllarda Aköz ve çalışma grubu tarafından Gâteaux türevi kullanılarak çeşitli problemler için fonksiyoneller türetilmiş ve bu yöntemle çeşitli karışık sonlu eleman çalışmaları yapılmıştır.(Aköz 1985, Aköz ve diğ.,1991) Gâteaux türevi yaklaşımının bazı önemli avantajları vardır. Bu avantajlardan bazıları; Verilen alan denklemlerinden, fonksiyonel ve sınır koşulları çok kolaylıkla elde edilmesi, alan denklemleri ve sınır koşullarının sağlam olarak fonksiyonele yansıtılması, ve alan denklemlerinin uyumluluğunun kontrol edilmesi sayılabilir (Özütok 1999).

İncelenen çalışmaları teori açısından değerlendirildiğinde araştırmacılar tarafından Eringen'in yerel olmayan bünye ilişkisine dayanarak, yerel olmayan kiriş modelleri geliştirilmiştir (Reddy 2007). Literatürde bulunan bu kiriş modelleri Euler-Bernoulli Kiriş Teorisi (NEBT) , Timoshenko Kiriş Teorisi (NTBT) ve Yüksek mertebeden kirişlerdir.

Euler-Bernoulli kirişi şekil değiştirmeden önce kiriş eksenine dik olan kesit düzleminin şekil değiştirmeden sonra da düzlem kaldığını; ve şekil değiştirmiş kesit düzlemi, şekil değiştirmeden sonra hala eksene dik kaldığı varsayımına dayandırılmaktadır. Euler-Bernoulli kirişi ince kirişler için geçerli olup, sadece eğilme etkileri dikkate alınır.

Timoshenko kiriş teorisinde, Euler-Bernoulli kiriş teorisinin normallik varsayımı gevşetilir ve kalınlık koordinatına göre sabit bir enine kayma şekil değiştirme durumu dahil edilir. Timoshenko kiriş teorisi, bu sabit kayma gerilmesi varsayımından kaynaklanan hatayı telafi etmek için kesme düzeltme faktörlerini gerektirir. Kayma

düzeltilme faktörleri sadece malzeme ve geometrik parametrelere değil aynı zamanda yükleme ve sınır koşullarına da bağlıdır. Düzeltme faktörü gerektirdiğinden daha yüksek mertebeden kayma şekil değiştirme teorileri geliştirilmiştir.

Bu çalışmada yerel olmayan Euler-Bernoulli ve Timoshenko kirişinin statik analizi için karışık sonlu elemanlar modeli sunulmuştur. Eringen'in yerel olmayan bünye denklemleri kullanılarak Euler-Bernoulli ve Timoshenko kirişlerine ait alan denklemleri, geometrik ve sınır koşulları varyasyon ifadesine (virtüel yer değiştirme ilkesi) dayalı olarak elde edilmiştir. Operatör formda ifade edilen alan denklemlerine Gâteaux türevi yaklaşımı kullanılarak yerel olmayan Euler-Bernoulli ve Timoshenko kirişlerine ait yeni fonksiyonel dinamik ve geometrik sınır koşulları ile birlikte elde edilmiştir. Bu fonksiyonel kullanılarak yerel olmayan kirişlerin sonlu elemanlar yöntemi ile çözülebilmesi için yer değiştirme (çökme), eğilme momenti, kesme kuvveti ve dönmelerin bilinmeyen olarak tanımlandığı NEBT4 ve NTBT8 kiriş elemanı ile değişik problemlerin statik analizi yapılmıştır.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Klasik elastisite teorisinin yetersiz olduğu durumları ortadan kaldırmak için geliştirilmiş yerel olmayan elastisite teorisi sürekli ortamlar mekaniğinde yeni bir yaklaşımdır. Yerel olmayan teori, nano boyuttaki malzemelerin mekanik davranışlarını ortaya koymakta oldukça başarılı sonuçlar vermiştir. Bu yöntem küçük boyutlu elemanlara uygulanabilir olması ve kabul edilebilir sonuçlar vermesi bakımından büyük ilgi uyandırmış ve yapı mühendisliği alanında da araştırmalara yol açmıştır. Küçük ölçekli elemanlarda yerel olmayan etkilerin önemi artmaktadır. Yerel teoride bir noktadaki gerilmeler hesaplanırken o noktaya komşu olan diğer noktalardaki şekil değiştirmelerin etkisi göz önüne alınmaz. Yerel olmayan teoride ise verilen bir noktadaki gerilme durumunun cismin bütün noktalarındaki şekil değiştirmelerinin bir fonksiyonu olduğu düşünülür.

Konuyla ilgili literatür araştırması yapıldığı zaman yerel olmayan kirişlere ait birçok araştırma mevcuttur. İncelenen çalışmalarını kronolojik sırada özetlersek,

Yerel olmayan elastisite teorisinin kapsamını ilk olarak Eringen (1972,1983,2002) ve Eringen-Edelen (1972) tarafından sunulmuştur.

Peddieson ve diğer. (2003), Eringen'in yerel olmayan elastisite teorisini nanoteknoloji alanına ilk uygulayan araştırmacılar olup, çalışmaları bu alanda bir öncü çalışma olarak kabul edilmektedir. Euler-Bernoulli kiriş modeli yerel olmayan elastik bünye denklemlerini kullanarak değişik sınır koşulları için birkaç kapalı form çözümü sunmuşlardır. Bu çalışmadan sonra, birçok araştırmacı nanoyapıların analizinde Eringen'in yerel olmayan modelini kullanmıştır.

Xu (2006), nano-mikron kirişlerin çapraz titreşimleri üzerindeki yerel olmayan etkinin etkisini incelemiştir. Yerel olmayan etkinin etkisinin, özellikle yüksek dereceli frekanslar ve titreşimli modlar için daha büyük hale geldiği bulunmuştur.

Reddy (2007), Euler-Bernoulli, Timoshenko, Reddy ve Levinson kiriş teorileri dahil olmak üzere çeşitli kiriş teorilerinin yerel olmayan modellerini formüle ederek eğilme, serbest titreşim ve burkulmanın analitik çözümlerini geliştirmiştir.

C. M. Wang ve arkadaşları (2008) tarafından Eringen'in yerel olmayan elastisite teorisine ve Timoshenko kiriş teorisine dayalı mikro ve nano kirişlerin eğilme problemi ele alınmıştır. Virtüel iş teorisi kullanılarak nonlocal Timoshenko kirişleri alan denklemleri elde edilip yer değiştirme, dönme ve iç kuvvetler hesaplanmıştır.

Metin Aydoğdu (2009) tarafından yapılan çalışmada yerel ve yerel olmayan elastisite kullanılarak nano ölçekli kirişlerin eğilme, burkulma ve titreşimini analiz etmek için geliştirilmiş kiriş teorisi kullanılmıştır.

J. K. Phadikar ve S. C. Pradhan (2010) tarafından yapılan çalışmada Euler-Bernoulli kiriş teorisi ve klasik plak teorisinin yerel olmayan diferansiyel elastisite yaklaşımı için Galerkin sonlu elemanlar formülasyonu ele alınmıştır.

J. N. Reddy (2010) tarafından yapılan çalışmada Euler-Bernoulli ve Timoshenko plak teorileri Eringen'in yerel olmayan diferansiyel bünye denklemleri ve Von Kârman doğrusal olmayan şekil değiştirmelere bağlı türetilmiştir. Bu nonlocal kiriş teorileri türetilip geliştirilmiş yer değiştirme terimlerini içeren virtüel iş ilkesi, yer değiştirmeye dayalı sonlu eleman modeli için sunulmuştur.

M. A. Eltaher ve ark. (2012) tarafından yapılan çalışmada yerel olmayan bünye denklemi önerilmiş ve Euler-Bernoulli kiriş için hareket denklemleri, varyasyon ifadesine dayalı olarak türetilmiştir. Euler-Bernoulli kirişlerinin titreşim analizi, sayısal sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak çözülmüştür.

Huu - Tai Thai ve Thuc P. Vo (2012) tarafından yapılan çalışmada nano kirişlerin hem küçük ölçekli hem de kayma deformasyon etkilerini açıklayan yerel olmayan bir sinüsoidal teori önermişlerdir. Küçük ölçekli etki, Eringen'in yerel olmayan bünye ilişkisi kullanılarak dikkate alınırken, kayma deformasyon etkisi sinüsoidal kayma deformasyon teorisi kullanmışlardır. Hareket denklemleri ve sınır koşulları Hamilton ilkesi kullanılarak nano kirişlerin titreşim, burkulma ve eğilme problemleri incelenmiştir.

Huu - Tai Thai (2012) tarafından yapılan çalışmada nano kirişlerin burkulması, eğilmesi ve titreşimi için yerel olmayan bir kiriş teorisi önerilmiştir.

S. A. M. Ghannadpour ve ark. (2013) tarafından yapılan çalışmada yerel olmayan Euler-Bernoulli kirişlerinin eğilme, burkulma ve titreşim analizleri ele alınmıştır. Değişik sınır koşullarına ait yerel olmayan kirişlerin analizi için Ritz yöntemi kullanılmıştır.

M. A. Eltaher ve ark. (2013) tarafından yapılan çalışmada yerel olmayan Euler-Bernoulli kirişlerin titreşim analizi sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak incelenmiştir. Eringen'in yerel olmayan bünye denklemlerine dayalı olarak yerel olmayan Euler-Bernoulli için hareket denklemleri ve eleman matrisleri varyasyonel ifadesine dayalı olarak türetilmiştir.

S. C. Pradhan ve U. Mandal (2013) tarafından yapılan çalışmada Timoshenko kiriş teorisinin yerel olmayan diferansiyel elastisite yaklaşımı için sonlu elemanlar formülasyonu geliştirilmiştir. Çalışmada karbon nano tüplerin titreşim, burkulma ve eğilme problemleri çözülmüştür.

Samir A. Emam (2013) tarafından yapılan çalışmada bileşik bir model kullanarak yerel olmayan elastisite teorisine göre nano kirişlerin statik doğrusal olmayan burkulma için analitik bir çözüm geliştirilmiştir. Euler-Bernoulli, birinci dereceden kayma deformasyon teorisi ve daha yüksek dereceli Reddy teorisine geometrik doğrusal olmama durumu hesaba katılarak ele alınmış ve denge denklemleri virtüel iş ilkesi kullanılarak türetilmiştir.

M. A. Eltaher ve ark. (2013) tarafından yapılan çalışmada fonksiyonel derecelendirilmiş nano kirişlerin eğilme ve burkulması için yerel olmayan bir sonlu eleman modeli geliştirilmiştir. Sonlu eleman matrisini türetmek için varyasyon formülasyonu geliştirilmiştir.

Francesco Marotti de Sciarra (2014) tarafından yapılan çalışmada bir yüksek dereceli Euler-Bernoulli yerel olmayan kiriş teorisine dayalı olarak nano kirişlerin yer değiştirme ve eğilme momentini değerlendirmek için yerel olmayan bir sonlu eleman yöntemi geliştirilmiştir.

J. N. Reddy ve Sami El-Borgi (2014) tarafından yapılan çalışmada Eringen'in yerel olmayan diferansiyel modeline dayalı olarak dönme ve malzeme uzunluğunu hesaba katan Euler-Bernoulli ve Timoshenko kirişlerinin denklemlerini elde ederek doğrusal olmayan sonlu eleman modelini geliştirmişlerdir. Euler-Bernoulli ve Timoshenko kirişlerine ait denklemleri, Eringen'in yerel olmayan diferansiyel model ve modifie Von

Kârman nonlinear şekil değiştirme dikkate alınarak virtüel yer değiştirme ilkesi ile türetilmiştir.

Li Li ve Yujin Hu (2015) tarafından yapılan çalışmada yerel olmayan şekil değiştirme gradyan teorisi çerçevesinde boyuta bağlı doğrusal olmayan Euler-Bernoulli kiriş formülasyonu geliştirmişlerdir. Bu formülasyon kullanılarak basit mesnetli kirişlerin burkulma sonrası sehimleri ve kritik burkulma kuvvetleri analitik olarak incelenmiştir.

Xiao – Jian Xu ve ark. (2017) tarafından yapılan çalışmada yerel olmayan şekil değiştirme gradyan teorisi ile yüksek mertebeden sınır koşullarının Euler-Bernoulli kirişlerinin burkulma davranışları üzerinde önemli bir rol oynaması gerektiği gerçeğiyle motive edilmiştir.

Ngoc – Tuan Nguyen ve ark. (2015) tarafından yapılan çalışmada nano kirişlerin statik analizi için karışık sonlu eleman metodu kullanılmıştır. Ana denklem, yerel olmayan teori ile birleştirilmiş Euler-Bernoulli kiriş teorisi için türetmişlerdir.

Son Thai ve ark. (2018) tarafından yapılan çalışmada nano kirişlerin statik eğilme ve titreşim analizlerini sadece bir değişkeni içeren basit bir yüksek mertebeden kayma deformasyonları kiriş teorisi önermişlerdir.

Bilgisayarların gelişmesi ile birlikte mühendislik uygulamalarında nümerik yöntemler önem kazanmıştır. Daha sonraki yıllarda da bu metod ve çözüm teknikleri hızla geliştirilmiş ve günümüzde pek çok mühendislik probleminin çözümü için kullanılan en iyi metodlardan birisi halini almıştır. Konu ile ilgili literatür araştırması yapıldığı zaman karmaşık geometriye ve sınır koşullarına sahip mühendislik problemlerinin çözümü için sonlu elemanlar metodu ve uygulamaları üzerine yapılmış çok sayıda çalışma olduğu gözlemlenmiştir. (Hughes 1987, Zienkiewicz 1977, Bathe 1982, Reddy 1985)

İncelenen alışmaları, çubuk teorilerinin formülasyonunda kullanılan kiriş teorileri EBT, TBT ve yüksek mertebeden kiriş teorileri ve yöntemler açısından da sonlu elemanlar metodunu üretmek için, varyasyonel formülasyon, ağırlık formülasyonu, Gâteaux türevi olarak sınıflayabiliriz. Gâteaux diferansiyeli kullanarak çeşitli problemler için fonksiyoneller üretilmiş ve bu yöntemle karışık sonlu elemanlar çalışmaları yapılmıştır. (Aköz ve diğ. 1996, Aköz ve diğ. 2000, Aköz ve diğ. 1999, Eratlı ve diğ. 1997, Eratlı ve diğ. 2002, Özütok ve diğ. 2013, Özütok ve diğ. 2014).

3. MATERYAL VE METOD

Yapı sistemlerinin hesabında, denge denklemi, kinematik bağıntıların belirlediği diferansiyel denklem, uygun sınır koşullarını sağlayacak şekilde çözülebilir. Basit problemlerin çözümünde etkin bir yol olmasına karşılık karmaşık geometriye ve sınır koşullarına sahip yapılar için problemin çözümü zorlanacaktır. Bu durumda olaya bu türlü çözümlere alternatif olarak enerji gibi skaler bir büyüklük açısından yaklaşmalı çözümü basitleştirecektir. Enerji yöntemleri veya ilkeleri kiriş, plak ve kabuk gibi yapısal mekanikteki problemler için, denge denklemleri ve ilgili sınır koşullarını geliştirmede çok yararlı olduğu kanıtlanmıştır. Ayrıca enerji yöntemleri elastisite problemlerine yaklaşık çözümler üretmek için yaygın olarak kullanılmıştır.

3.1. Enerji İlkeleri

Elastik bir cisim üzerinde yüzey ve hacim kuvvetleri tarafından yapılan iş, cisim içerisinde şekil değiştirme enerjisi şeklinde depolanır. İdealize edilmiş bir elastik cisimde depolanmış olan enerji, cismin orjinal şekil değiştirmemiş duruma geri döndüğünde tamamen geri kazanılabilir. Enerji ilkelerinin hareket noktası virtüel iş ilkesidir.

3.1.1. Virtüel İş İlkesi

Elastik bir cisim üzerindeki bir noktanın virtüel yer değiştirmesi, noktaya etki eden kuvvetlerin değişmeden kaldığı hayali bir yer değiştirmedir. Bu kuvvetlerin virtüel yer değiştirme sırasında yaptığı işe virtüel iş denir. Virtüel iş ilkesi elastik, plastik, termal ve mekanik yük altındaki her problem için uygulanabilir.

Virtüel iş ilkesini elde etmek için kabul edilebilir iç kuvvet ve yer değiştirme tanımlarına göre iç kuvvetlerin denge denklemlerini sağlaması, yer değiştirmelerin ise kinematik bağıntılarını ve sınır koşullarını sağlaması gerekir.

Şekil değiştiren cisim mekaniğinde karışık sınır değer problemini düşünelim. Sınırın bir bölgesinde u yer değiştirme vektörü, diğer bölgesinde ise t yüzey kuvvetleri verilmiş olsun.

İç kuvvet olarak kabul edilebilir gerilme tensörü σ_{ij} bölgede,

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad (3.1)$$

denge denklemi ile S_σ yüzeyinde,

$$\sigma_{ij} n_j = t_i^0(x_i) \quad (3.2)$$

sınır ve $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ simetri koşullarını sağlayan, bunun dışında keyfi olan üç boyutlu hal için 6 adet fonksiyondur. Buradan n_j sınırdaki birim dış normalin bileşeni t_i sınırdaki belirlenmiş fonksiyon $\sigma_{ij,j} = \partial\sigma_{ij} / \partial x_j$ yi göstermektedir.

Yer değiştirme olarak kabul edilebilir $u(x_i)$ fonksiyonu S_u yüzeyinde

$$u_i = u_i^0(x_i), i = 1,2,3 \quad (3.3)$$

sınır koşulunu sağlayan büyüklüktür.

Dengede bir cisim düşünelim. Gerilme tensörü $\sigma_{ij}(x_i)$, yer değiştirme $u(x_i)$ olmak üzere

$$\int_v \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \int_v f_i u_i dV + \int_{\delta_\sigma} t_i^0 u_i dS + \int_{\delta_u} \sigma_{ij} n_j u_i^0 dS \quad (3.4)$$

eşitliği virtüel iş ilkesinin matematik gösterimi olup, dengedeki bir cismin iç kuvvetlerinin virtüel işinin dış kuvvetlerin virtüel işine eşit olduğunu ifade eder. Virtüel iş ilkesi, denge ve kinematik bağıntı kullandığı için keyfi yapıdaki ortamlar için geçerlidir.

3.1.2. Virtüel Yer Değiştirme İlkesi

Probleme ait gerçek çözüm σ_{ij} gerilmelerini ve u_i yer değiştirmeleri olmak üzere, yer değiştirmeleri δu_i kadar değiştirelim ve $u_i + \delta u_i$ yer değiştirmesini göz önüne alalım.

δu_i , u_i nin değişimidir ve virtüel yer değiştirme adını alır. $u_i + \delta u_i$ de geometrik olarak kabul edilebilir. σ_{ij} ve $(u_i + \delta u_i)'$ yi (3.4)'de yerine koyulursa,

$$\int_v \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_v f_i \delta u_i dV + \int_{\delta_\sigma} t_i \delta u_i dS \quad (3.5)$$

elde edilir. Su sınırında $\delta u_1 = 0$ olduğu göz önünde tutmak gerekir.

Denklem (3.5) ifadesi “Dış kuvvetler altında dengede olan bir sisteme virtüel bir şekil değiştirme verilirse, bu virtüel şekil değiştirme altında dış kuvvetlerin virtüel işi iç kuvvetlerin virtüel işine eşittir.” Burada,

$$\delta U = \delta W \quad (3.6)$$

dir. Yani $\delta U = \delta W$ ise sistem dengededir. (Aköz ve diğ. 1987)

3.2. Değişim Ve Euler Denklemi (Varyasyon)

Enerji yöntemleri, belirli bir fonksiyoneli stasyoner yapan çözümlerin aranması esasına dayanmaktadır. Bu fonksiyonellerin ekstramum özelliklerinin incelendiği matematik dalına değişim (varyasyon) yöntemleri adı verilir. Geniş bir uygulama alanına sahip olan değişim yöntemleri ile fiziksel olaylar bazı sınır koşullarını sağlayan fonksiyonlar arasında, bir fonksiyoneli ekstramum yapan fonksiyon bulunabilir. Bu fonksiyonel skaler bir büyüklük olup enerji gibi bir fiziksel olay için elde edilebilir. Fiziksel olaya ait fonksiyonel belliyse bu fonksiyondan, bu olaya ait diferansiyel denklem ve sınır koşulları hesaplanabilir. Aynı şekilde diferansiyel denklem ve sınır koşulları belliyse bunlara eş değer fonksiyonel hesaplanabilir.

Değişim yöntemleri kullanmanın avantajları arasında;

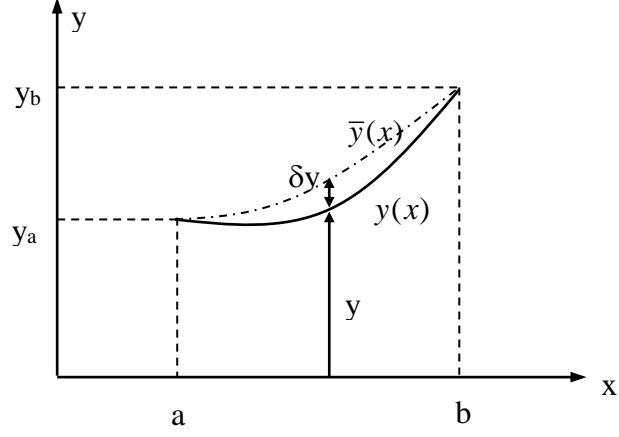
- Karmaşık problemlerin diferansiyel denklemlerinin ve sınır koşullarının elde edilmesinde güvenilir bir yoldur.
- Karmaşık problemlere ait diferansiyel denklem ve sınır koşulları altında çözümü güçse probleme Ritz, Galerkin, Sonlu Elemanlar gibi yöntemler kullanılarak yaklaşık bir çözüm verilebilir.

Bir fonksiyonel genel olarak,

$$I(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx \quad (3.7)$$

şeklinde gösterilir. Burada integral içerisindeki x serbest değişkeni, y ise x e bağlı bir fonksiyon olup problemin özelliğine göre bu fonksiyonun türevlerini de içerebilir.

Bir fonksiyonelin değişimi (varyasyonu) bir fonksiyonun ekstramumun bulunması problemine benzer olduğundan Şekil 3.1' de görüldüğü gibi,



Şekil 3.1. Fonksiyonların değişimi

y fonksiyonu komşuluğundaki $\bar{y}(x)$ fonksiyonu

$$\bar{y}(x) = y(x) + \mathcal{E}\eta(x) \quad (3.8)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada \mathcal{E} küçük bir parametre, $\eta(x)$ ise

$$\eta(a) = \eta(b) = 0 \quad (3.9)$$

koşullarını sağlayan sürekli bir fonksiyondur. $y(x)$ in değişimi (varyasyonu),

$$\delta y = \bar{y}(x) - y(x) = \mathcal{E}\eta(x) \quad (3.10)$$

şeklinde gösterilebilir. Benzer olarak fonksiyonların birinci türevleri arasındaki fark

$$\delta y' = \bar{y}'(x) - y'(x) = \mathcal{E}\eta'(x) \quad (3.11)$$

dür. Yani,

$$(\delta y)' = \delta(y') \quad (3.12)$$

dır. Denklem (3.7) fonsiyonelindeki $F(x, y, y')$ integrandının $y(x)$ in küçük değişimlerine karşı gelen davranışını bulmak istersek,

$$\Delta F = F(x, \bar{y}, \bar{y}') - F(x, y, y') \quad (3.13)$$

şeklinde yazılabilir. Burada eşitliğin sağ tarafındaki ilk terim Taylor serisinde açılarak (3.13) de yerine koyulursa,

$$\Delta F = \delta F + \frac{1}{2!} \delta^2 F + \dots \quad (3.14)$$

elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned} \delta F &= \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \\ \delta^2 F &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \delta y^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \delta y \delta y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \delta y'^2 \end{aligned} \quad (3.15)$$

olarak tanımlanmıştır. Benzer düşünceyle $I(y)$ fonsiyonelindeki değişim için

$$\begin{aligned} \Delta I &= I(x, \bar{y}, \bar{y}') - I(x, y, y') = \int_a^b F(x, \bar{y}, \bar{y}') dx - \int_a^b F(x, y, y') dx \\ \Delta I &= \int_a^b \Delta F dx \end{aligned} \quad (3.16)$$

olarak bulunabilir. ΔF için denklem (3.14)'ü (3.16)'da yerine yazarsak,

$$\Delta I = \delta I + \frac{1}{2} \delta^2 I + \dots \quad (3.17)$$

elde edilir. Burada,

$$\delta I = \int_a^b \delta F dx = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx \quad (3.17a)$$

$$\delta^2 I = \int_a^b \delta^2 F dx = \int_a^b \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \delta y^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \delta y \delta y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \delta y'^2 \right) dx \quad (3.17b)$$

$I(y)$ fonsiyonelinin birinci ve ikinci değişimleridir. $y(x)$ in $I(y)$ fonsiyonelinin ekstremum yaptığı kabul ediliyorsa bunun için gerekli koşul birinci varyasyonun

$\delta I(y) = 0$ eşitliğini sağlamasıdır. Denklem (3.17a)'nın ikinci teriminin integrali alınırsa,

$$\delta I = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx + \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right]_a^b = 0 \quad (3.18)$$

elde edilir. $x = a$ ve $x = b$ sınırında y ve y' değerleri biliniyorsa bunlara karşı gelen değişimleri de sıfırdır.

$$\delta y(a) = \delta y(b) = \delta y'(a) = \delta y'(b) = 0 \quad (3.19)$$

yazılabilir. Bu koşullar altında denklem (3.18)'deki son terim düşer. Birinci terimin sıfır olması için δy keyfi fonksiyon olduğu için integral içindeki çarpan sıfır olmalıdır.

Yani,

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \quad (3.20)$$

olmalıdır. Buna $I(y)$ fonksiyonelinin Euler–Lagrange denklemi adı verilir. Eğer bir $y(x)$ fonksiyonu denklem (3.20)'deki diferansiyel denklemini sağlarsa aynı zamanda denklem (3.7)'deki fonksiyoneli de ekstremum yapar.

Burada $y(x)$ ve $y'(x)$ in $x = a$, $x = b$ de tanımlanması halinde fonksiyonelin ekstremuma sahip olabilmesi için gerekli koşul olan Euler–Lagrange denklemi elde edildi. Sınır koşulları verilmişse fonksiyonelin ekstremuma sahip olabilmesi için bazı sınır koşullarının sağlanması gerekir. Bu koşulları denklem (3.18) ifadesinden bulabiliriz. Eğer $y(x)$ sınırlarda belirlenmemişse, denklem (3.18) ifadesinin sağlanması için son terim sıfır olmalıdır. Bunun için $x = a$ ve $x = b$ de

$$\delta y = 0 \quad \text{veya} \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad (3.21)$$

olmalıdır. Buradaki birinciye geometrik sınır koşulları ikinciye de doğal sınır koşulları diyebiliriz.

Sınır koşullarının karmaşıklığı nedeniyle diferansiyel denklemi çözmek her zaman mümkün olmaz. Yaklaşık çözüm yöntemleri kullanılarak problemin çözümü yapılabilir.

Yaygın olarak kullanılan yaklaşık çözüm yöntemlerinin başlıcaları Ritz ve sonlu elemanlar yöntemidir. Bu yöntemlerin hareket noktası diferansiyel denkleme karşı gelen fonksiyonelin bulunmasıdır. Diferansiyel denklem verildiğinde buna karşı gelen fonksiyonelin ‘ $I(y)$ ’ bulunması için

- Matematik manipulasyon
- Kendine eş sistemler için klasik yöntem
- Genel sistemler için (kendine eş ve doğrusal olmayan) Gâteaux diferansiyeli

yöntemleri kullanılabilir. Bu yöntemler içerisinde Gâteaux türevi yaklaşımındaki bazı önemli avantajlarından dolayı bu çalışmada kullanılacaktır (Özütok 1999). Bunlardan bazıları şunlardır;

- Verilen alan denklemlerinden, fonksiyonel ve sınır koşulları çok kolaylıkla elde edilebilir.
- Alan denklemleri ve sınır koşulları sağlam olarak fonksiyonele yansıtılır.
- Alan denklemlerinin uyumluluğu kontrol edilmiş olur.

Gâteaux diferansiyeline ait geniş kullanım ve açıklamaları (Aköz ve diğ. 1991) de yer almaktadır. Burada basitlik için temel kavram ve tanımları verilecektir. Sınır koşullarını da içerecek şekilde alan denklemlerinin tamamı

$$\mathbf{Q} = \mathbf{L}y - \mathbf{f} \quad (3.22)$$

operatör şeklinde yazılabilir. \mathbf{Q} operatörünün Gâteaux türevi ise şu şekilde tanımlanmaktadır.

$$d\mathbf{Q}(y, \bar{y}) = \left. \frac{\partial \mathbf{Q}(y + \tau \bar{y})}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} \quad (3.23)$$

Burada τ bir skalerdir. \mathbf{Q} operatörüne ait fonksiyoneli bulabilmek için \mathbf{Q} operatörünün potansiyel olması gerekir (Oden ve Reddy 1976). Bunun için,

$$\langle d\mathbf{Q}(y, \bar{y}), y^* \rangle = \langle d\mathbf{Q}(y, y^*), \bar{y} \rangle \quad (3.24)$$

koşulunun sağlanması gerekir. Burada \bar{y} ve y^* büyüklükleri y nin içinde buldukları uzayın elemanlarıdır. Denklem (3.24)’deki tırnak parantez, iç çarpımı göstermektedir.

Bu tanımlar kullanılarak iç çarpımlar yapılırsa \mathbf{Q} operatörünün potansiyel olduğu görülür ve sembolik bir gösterimle dinamik sınır koşulları,

$$-\mathbf{R} + \hat{\mathbf{R}} = 0, \quad -\mathbf{M} + \hat{\mathbf{M}} = 0 \quad (3.25)$$

ve geometrik sınır koşulları,

$$-\mathbf{\Omega} + \hat{\mathbf{\Omega}} = 0, \quad -\mathbf{u} + \hat{\mathbf{u}} = 0 \quad (3.26)$$

elde edilir. (3.25) ve (3.26) denklemlerindeki şapkalı terimler sırasıyla sınırlarda bilinen kuvvet, moment, dönme ve yer değiştirme vektörlerine karşı gelmektedir. \mathbf{Q} sürekli ve potansiyel operatörse buna ait fonksiyonel,

$$I[y] = \int_0^1 \langle \mathbf{Q}(sy), y \rangle ds \quad (3.27)$$

şeklinde bulunabilir. Burada s skaler bir büyüklüktür.

3.3. Kiriş Teorileri

Kinematik deformasyonları ifade eden birçok kiriş teorisi vardır. Bu farklı kiriş modellerine ait literatürde elde edilebilir. Euler–Bernoulli kiriş modeli bunlardan en basitidir. Euler–Bernoulli kiriş teorisi şekil değişmeden önce kiriş eksenine dik olan düzlem kesit alanının şekil değişiminden sonra eksene dik ve düzlem kalması varsayımına dayanır ve sadece eğilme etkileri dikkate alınır. İnce kiriş yapılar için kullanışlıdır. Ancak kirişin kayma etkilerini dikkate almadığından yetersizdir. Bu sorunu aşabilmek için kiriş kalınlığındaki artışa bağlı olarak eğilme etkisinin yanı sıra kayma etkilerini de dikkate alan Timoshenko kiriş teorisi geliştirilmiştir. Literatür araştırması yapıldığında farklı çözüm yöntemlerinde ve değişik yükleme durumlarında her iki kiriş teorisine ait çok sayıda çalışma bulunmaktadır.

Kiriş teorilerini tanımlamak için bir (x, y, z) koordinat takımı seçilirse bu eksen takımına göre yer değiştirme alanı tanımlanabilir.

3.3.1. Euler-Bernoulli Kiriş Teorisi (EBT)

Euler–Bernoulli kiriş teorisindeki yer değiştirme alanları,

$$u(x, z) = -z w_{,x}$$

$$w(x, z) = w(x) \quad (3.28)$$

Burada $w_{,x}$ enine yer değiştirmenin birinci turevini gostermektedir. Yukarıdaki yer değiştirme ifadesine g6re birim uzama oranı;

$$\varepsilon_x = u_{,x} = -z w_{,xx} \quad (3.29)$$

dir. Virtuel şekil değiştirme ise denklemde yerine yazılırsa,

$$\delta\varepsilon_x = \delta u_{,x} = -z \delta w_{,xx} \quad (3.30)$$

elde edilir. Denge denklemlerini turetmeğin virtuel yer değiştirme ilkesi kullanılarak iç kuvvetlerin toplam virtuel işi;

$$\delta U = \int_0^L \int_A \sigma_x \delta\varepsilon_x dA dx \quad (3.31)$$

dir. Denklem (3.30), denklem (3.31)' de yerine yazıldığında,

$$\delta U = \int_0^L \int_A \sigma_x (-z \delta w_{,xx}) dA dx = \int_0^L -M_x \delta w_{,xx} dx \quad (3.32)$$

elde edilir. Burada M_x eğilme momenti, A kesit alanı olmak 6zere,

$$M_x = \int_A \sigma_x z dA \quad (3.33)$$

şeklinde hesaplanabilir. Yayılı q dış kuvvetinin altında kalınlığı h olan bir kirişin dış kuvvetlerinin virtuel işi ise;

$$\delta W = -\int_0^L q \delta w dx \quad (3.34)$$

dir. Verilen bir kiriş eleman için dengede olması durumunda virtuel yer değiştirme ilkesi gereği,

$$\delta U + \delta W = 0 \quad (3.35)$$

olmalıdır. Denklemde ifade açık şekilde yazılırsa,

$$\int_0^L (-M_x \delta w_{,xx}) dx - \int_0^L q \delta w dx = 0 \quad (3.36)$$

elde edilir. Burada $\delta w_{,xx}$ ifadesindeki türevler kısmi integrasyon uygulanarak düzenlenirse,

$$\int_0^L -M_x \delta w_{,xx} dx = -[M_x \delta w_{,x}]_0^L + [M_{x,x} \delta w]_0^L - \int_0^L (M_{x,xx} \delta w) dx \quad (3.37)$$

elde edilir. Bu ifade denklemde yerine yazılarak düzenlenirse,

$$\int_0^L \{ [-M_{x,xx} - q] \delta w \} dx = 0 \quad (3.38)$$

dir. $0 < x < L$ aralığında Euler-Lagrange denklemi

$$-M_{x,xx} - q = 0 \quad (3.39)$$

özdeş olarak sağlanmalıdır.

3.3.2. Timoshenko Kiriş Teorisi (TBT)

Yayılı q dış kuvvetinin altında kalınlığı h olan bir kirişin yer değiştirme alanı şu şekilde tanımlanabilir;

$$\begin{aligned} u(x, z) &= z \phi_x \\ w(x, z) &= w(x) \end{aligned} \quad (3.40)$$

Yukarıdaki yer değiştirme ifadesine göre birim uzama oranı;

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= u_{,x} = z \phi_{x,x} \\ \gamma_{xz} &= u_{,z} + w_{,x} = \phi_x + w_{,x} \end{aligned} \quad (3.41)$$

dir. Virtüel şekil değiştirme ise denklemde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_x &= \delta u_{,x} = z \delta \phi_{x,x} \\ \delta \gamma_{xz} &= \delta u_{,z} + \delta w_{,x} = \delta \phi_x + \delta w_{,x} \end{aligned} \quad (3.42)$$

elde edilir. Denge denklemlerini türetmek için virtüel yer değiştirme ilkesi kullanılarak iç kuvvetlerin toplam virtüel işi;

$$\delta U = \int_0^L \int_A (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dz dx \quad (3.43)$$

dir. Denklem (3.42), denklem (3.43)' de yerine yazıldığında,

$$\delta U = \int_0^L \int_A [\sigma_x (z \delta \phi_{x,x}) + \tau_{xz} (\delta \phi_x + \delta w_{,x})] dz dx \quad (3.44)$$

elde edilir. Burada M_x eğilme momenti, Q_x kesme kuvveti, A kesit alanı olmak üzere,

$$M_x = \int_A \sigma_x z dA$$

$$Q_x = \int_A \tau_{xz} dA \quad (3.45)$$

şeklinde hesaplanabilir. Dış kuvvetlerin virtüel işi ise;

$$\delta W = - \int_0^L q \delta w dx \quad (3.46)$$

dir. Verilen bir kiriş eleman için dengede olması durumunda virtüel yer değiştirme ilkesinin gereği denklem (3.35)'de belirtilmişti. Bununla, denklemde ifade açık şekilde yazılırsa,

$$\int_0^L [(M_x \delta \phi_{x,x}) + Q (\delta \phi_x + \delta w_{,x})] dx - \int_0^L q \delta w dx = 0 \quad (3.47)$$

elde edilir. Buradaki türevli ifadelere kısmi integrasyon uygulanarak düzenlenirse,

$$\int_0^L M_x \delta \phi_{x,x} dx = [M_x \delta \phi_{,x}]_0^L - \int_0^L (M_{x,x} \delta \phi_x) dx$$

$$\int_0^L Q \delta w_{,x} dx = [Q \delta w]_0^L - \int_0^L (Q_{,x} \delta w) dx \quad (3.48)$$

$$\int_0^L [(-M_{x,x} + Q) \delta \phi_x + (-Q_{,x} - q) \delta w] dx = 0$$

dır. Timoshenko kiriş teoremine göre denge denklemleri,

$$Q_{,x} - q = 0$$

$$-M_{,x,x} - Q = 0 \quad (3.49)$$

elde edilmiştir.

3.4. Yerel Olmayan Elastisite Teorisi ve Fonksiyonel

3.4.1. Yerel Olmayan Elastisite Teorisi

Yerel elastisite teorisiyle bir noktadaki gerilmeler hesaplanırken o noktaya komşu diğer noktadaki şekil değiştirmeler dikkate alınmamaktadır. Gerilmeler sadece yerel etkiler dikkate alınarak hesaplanmaktadır. Bu gerilmeler altındaki yer değiştirmeleri sonucu ortaya çıkan geometrik düzensizlikler, cismin içinde gerilmelere sebep olmaktadır. Ortaya çıkan bu gerilmelerin cismin yerel elastisite teorisi ile hesabındaki bazı düzensizlikler oluşur. Yerel elastisite teorisinin yetersiz olduğu durumlarda sürekli ortam mekaniğinde yeni bir yaklaşım olan yerel olmayan elastisite teorisi geliştirilmiştir. Yerel olmayan elastisite teorisinde ise yerel elastisite teorisinin aksine sürekli bir cismin bir noktasındaki gerilme bulunurken, sadece o noktadaki şekil değiştirmelerine değil aynı zamanda komşu noktalardaki şekil değiştirmelerin katkıları da göz önüne alınmaktadır. Şekil değiştirme ve gerilmelerdeki tekillikler, problemin yerel olmayan elastisite teorisi ile çözümünde ortadan kalkar.

Klasik elastisite teorisi küçük ölçekli modellerin hesaplanmasında yetersiz olmasından dolayı küçük ölçekli yapıların incelenmesinde yerel olmayan teori büyük önem taşımaktadır. Cisimlerin yerel elastisite ile yerel olmayan elastisite teorisi arasındaki fark bünye denklemleridir.

Eringen'e göre bir cismin bir noktasındaki gerilmenin sadece o noktadaki yerel gerilmeye bağlı olmadığını, cismin bütün noktalarındaki yerel gerilmelerin katkısının göz önüne alınması gerektiği ifade edilmişti. Bu düşünce deneysel gözlemlere bağlandı. Böylece, x noktasındaki yerel olmayan gerilme ifadesi;

$$\sigma = \int_A K(|x' - x|, \tau) t(x') dx' \quad (3.50)$$

şeklindedir. Burada $t(x)$, x noktasındaki makroskopik tensörü ve çekirdek fonksiyonu $K|x' - x|$ yerel olmayan modülü temsil eder. $|x' - x|$ mesafe ve τ , iç ve dış uzunluklara bağlı olan bir malzeme sabitidir. Bir x noktasındaki t , genelleştirilmiş Hooke Yasası ve noktadaki \mathcal{E} ile ilgilidir;

$$t(x) = C(x) : \mathcal{E}(x) \quad (3.51)$$

Burada C , dördüncü dereceden elastikiyet tensörüdür ve çift noktalı ürünü gösterir. Bununla birlikte, eşdeğer bir diferansiyel formda integral kurucu ilişkiler mümkündür;

$$(1 - \tau^2 \ell^2 \nabla^2) \sigma = t$$

$$\tau = \frac{e_0 a}{\ell} \quad (3.52)$$

Tek boyutlu durumda elastik bir malzeme için, yerel olmayan kurucu ilişkiler şu şekilde basitleştirilebilir (Eringen 1983):

$$\sigma_x - \mu \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} = E \mathcal{E}_x \quad (3.53)$$

$$\tau_{xz} - \mu \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x^2} = G \gamma_{xz} \quad (3.54)$$

Yerel olmayan elastisite teorisine göre gerilme denklemleri verilmiştir. Burada, $\mu = (e_0 a)^2$, E , G , e_0 ve a sırasıyla yerel olmayan elastisite parametresi, elastisite modülü, kayma modülü, boyutsuz bir malzeme sabiti ve iç karakteristik uzunluğudur. Nonlocal parametresi $\mu = 0$ olduğu zaman yerel teorideki bünye denklemleri,

$$\sigma_x = E \mathcal{E}_x \quad (3.55)$$

$$\tau_{xz} = G \gamma_{xz} \quad (3.56)$$

olduğu bilinmektedir.(Reddy 2007).

Euler-Bernoulli kiriş teorisinde (3.55) denkleminin her iki tarafı ‘ $z dz$ ’ ile çarpılır ve denklem (3.29) ifadesi yerine konursa,

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz = \int_{-h/2}^{h/2} E \varepsilon_x z dz = \int_{-h/2}^{h/2} E (-z w_{,xx}) z dz = -EI w_{,xx} \quad (3.57)$$

bünye ilişkisi elde edilir. Denklem (3.53) yerel olmayan elastisite teorisine göre düzenlenmesi için ‘ $z dz$ ’ ile çarpılırsa,

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz - \int_{-h/2}^{h/2} \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sigma_x z dz = E \varepsilon_x \quad (3.58)$$

olur. Buradan yerel olmayan elastisite teorisine dayalı NEBT için kinematik denklem,

$$M - \mu M_{,xx} = -EI w_{,xx} \quad (3.59)$$

elde edilir. Burada I , atalet momentidir. Yerel olmayan Timoshenko kiriş teorisi (NTBT) için denklem (3.53) ve (3.54) ‘ün her iki tarafı ‘ $z dz$ ’ ile çarpılırsa,

$$M_x - \mu \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} = EI \phi_{,x,x}$$

$$Q - \mu \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = GA(\phi_x + w_x) \quad (3.60)$$

bünye ilişkisi elde edilir. $\alpha = \frac{1}{EI}$ ve $\beta = \frac{1}{GA}$ şeklinde tanımlanmaktadır. Bu ifadeler

denklem (3.59) ve (3.60)’da yerine konulursa NEBT için,

$$-\alpha (M - \mu M_{,xx}) - w_{,xx} = 0 \quad (3.61)$$

şeklindedir. NTBT için,

$$-\alpha (M_x - \mu M_{,xx}) + \phi_{,x,x} = 0$$

$$-\beta (Q - \mu Q_{,xx}) - (\phi_x + w_x) = 0 \quad (3.62)$$

şeklinde yazılabilir.

3.4.2. Alan Denklemleri ve Fonksiyonellerin Elde Edilmesi

Denklem (3.39) ve (3.59)’da elde edilen NEBT kiriş teorisine ait alan denklemleriyle denklem (3.49) ve (3.62)’de elde edilen NTBT kiriş teorisine ait alan denklemlerinin yanı sıra kirişlerin sembolik olarak dinamik sınır koşulları ve geometrik sınır koşulları

denklem (3.25) ve (3.26)'da ifade edilmiştir. Sınır koşullarının açık ifadeleri varyasyonel işlemler sonucunda elde edilecektir.

Yerel olmayan kırımlar için sınır koşullarını da içerecek şekilde alan denklemlerinin tamamı denklem (3.22)'de yerine konulursa NEBT için Q operatörü ,

$$\left[\begin{array}{c|cccc} L_{ij} & & & & \\ \hline & 0 & & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & -1 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} y_i \\ \dots \\ w \\ w' \\ M \\ T \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} f_{ij} \\ \dots \\ \hat{T} \\ -\hat{M} \\ \hat{w}' \\ -\hat{w} \end{array} \right\} \quad (3.63)$$

matris formunda gösterilebilir. Burada L_{ij} , y_i ve f_i ifadeleri,

$$\begin{aligned} L_{1,2} &= -(\cdot)_{,xx} \\ L_{2,1} &= -(\cdot)_{,xx} , \quad L_{2,2} = -\alpha [1 - \mu(\cdot)_{,xx}] \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$y_1 = w , \quad y_2 = M , \quad f_1 = q$$

dir. NTBT için Q operatörü,

$$\left[\begin{array}{c|cccc} L_{ij} & & & & \\ \hline & 0 & & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ & 0 & 0 & -1 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} y_i \\ \dots \\ Q \\ M \\ \phi \\ w \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} f_{ij} \\ \dots \\ -\hat{w} \\ -\hat{\phi} \\ \hat{M} \\ \hat{Q} \end{array} \right\} \quad (3.65)$$

matris formunda yazılabilir. Buradaki L_{ij} , y_i ve f_i ifadeleri sırası ile,

$$\begin{aligned} L_{1,4} &= -(\cdot)_{,x} \\ L_{2,3} &= -(\cdot)_{,x} , \quad L_{2,4} = 1 \\ L_{3,2} &= (\cdot)_{,x} , \quad L_{3,3} = -\alpha [1 - \mu(\cdot)_{,xx}] \end{aligned} \quad (3.66)$$

$$L_{4,1} = (\cdot)_{,x} , L_{4,2} = -(\cdot)_{,x} , L_{4,4} = -\beta \left[1 - \mu(\cdot)_{,xx} \right]$$

$$y_1 = w , y_2 = \phi , y_3 = M , y_4 = Q , f_1 = q$$

şeklindedir. Q operatörünün Gâteaux türevi denklem (3.23)'de yerine konularak elde edilir. Q operatörü denklem (3.24)'de yerine yazılarak NEBT ve NTBT kirişi için potansiyel olduğu görülür ve sırasıyla sınır koşulları da,

$$\begin{aligned} [R, u]_{\sigma} &= [M_{,x}, w]_{\sigma} - \alpha\mu [M_{,x}, M]_{\sigma} \\ - [M, \Omega]_{\sigma} &= [M, w_{,x}]_{\sigma} \\ [\Omega, M]_{\varepsilon} &= - [w_{,x}, M]_{\varepsilon} \\ - [u, R]_{\varepsilon} &= - [w, M_{,x}]_{\varepsilon} + \alpha\mu [M, M_{,x}]_{\varepsilon} \end{aligned} \quad (3.67)$$

$$\begin{aligned} [R, u]_{\sigma} &= [w, Q]_{\sigma} + \alpha\mu [M_x, M_{x,x}]_{\sigma} + \beta\mu [Q, Q_{,x}]_{\sigma} \\ - [M, \Omega]_{\sigma} &= - [\phi_x, M_x]_{\sigma} \\ [\Omega, M]_{\varepsilon} &= [M_x, \phi_x]_{\varepsilon} \\ - [u, R]_{\varepsilon} &= - [Q, w]_{\varepsilon} - \alpha\mu [M_{x,x}, M_x]_{\varepsilon} - \beta\mu [Q_{,x}, Q]_{\varepsilon} \end{aligned} \quad (3.68)$$

şekinde elde edilir. Bu durumda alan denklemlerine karşı gelen $I[y]$ fonksiyoneli denklem (3.27)'de yerine konularak elde edilir. Bu çalışmada NEBT kirişi alan denklemlerine karşılık gelen fonksiyonel,

$$\begin{aligned} I[y] &= [M_{,x}, w_{,x}] - [q, w] - \frac{\alpha}{2} [M, M] - \frac{\alpha\mu}{2} [M_{,x}, M_{,x}] \\ &+ \left[(\hat{M} - M), \Omega \right]_{\sigma} - \left[(u - \hat{u}), \hat{R} \right]_{\varepsilon} - \left[\hat{\Omega}, M \right]_{\varepsilon} - \left[\hat{R}, u \right]_{\sigma} \end{aligned} \quad (3.69)$$

şeklindedir. NTBT kirişi alan denklemlerine karşılık gelen fonksiyonel,

$$\begin{aligned} I[y] &= - [Q, w_{,x}] + [M_x, \phi_{x,x}] - [Q, \phi_x] - \frac{\alpha}{2} [M_x, M_x] \\ &- \frac{\alpha\mu}{2} [M_{x,x}, M_{x,x}] - \frac{\beta}{2} [Q, Q] - \frac{\beta\mu}{2} [Q_{,x}, Q_{,x}] - [q, w] \\ &+ \left[(R - \hat{R}), u \right]_{\sigma} - \left[(\hat{M} - M), \Omega \right]_{\sigma} - \left[\hat{\Omega}, M \right]_{\varepsilon} + [\hat{u}, R]_{\varepsilon} \end{aligned} \quad (3.70)$$

şeklindedir.

3.5. Sonlu Elemanlar Yöntemi (FEM)

Sonlu elemanlar yöntemi, alan problemlerinin sayısal çözümü için bir yöntemdir. Sonlu elemanlar yöntemindeki temel fikir, karmaşık bir problemin çözümünü daha basit bir problemle değiştirerek bulmaktır. Çözümü bulmada asıl problemin yerini daha basit bir problem aldığından, kesin çözüm yerine sadece yaklaşık bir çözüm bulunacaktır.

Sonlu elemanlar yönteminin mühendislik uygulamalarında, denge problemi (kiriş, plak, kabukların statik analizi), özdeğer problemleri (yapıların doğal frekansları ve modları, yapıların stabilite problemleri) ve yayılma problemleri (dalgaların yayılımı) dir. Sonlu elemanlarla ilgili geniş bilgi Rao (2018) ve Zienkiewicz (1977)'de verilmiştir.

Sonlu eleman yöntemiyle çözüm her zaman düzenli bir adım adım süreci takip eder. Bu adımlar;

- Yapıyı veya çözüm bölgesini alt bölümlere veya elemanlara ayırmaktır. Elemanların sayısı, türü, boyutu ve düzenine karar verilerek yapı uygun sonlu elemanlarla modellenir.
- Bölgenin elemanlara ayrılmasından sonra büyüklükleri ifade etmek için sürekli fonksiyonlar seçilir. Bu fonksiyonlara şekil fonksiyonları adı verilir. Karmaşık bir yapının herhangi bir belirli yük koşulu altında bu büyüklüklerin çözümü tam olarak tahmin edilemediğinden, bilinmeyen çözüme yaklaşmak için bir eleman içinde uygun bir çözüm varsayıyoruz. Varsayılan çözüm, hesaplama açısından basit olmalı. Ancak belli yakınsama gereksinimlerini karşılamalıdır.
- Uygun bir varyasyon ilkesi kullanılarak elde edilen fonksiyonel şekil fonksiyonları ile ifade edilirse eleman matrisleri, uygun bir şekilde birleştirilerek sistem matrisi elde edilir.
- Yük vektörleri ve sınır koşulları dikkate alınarak denklem takımının çözümü yapılır.

3.5.1. Şekil Fonksiyonları

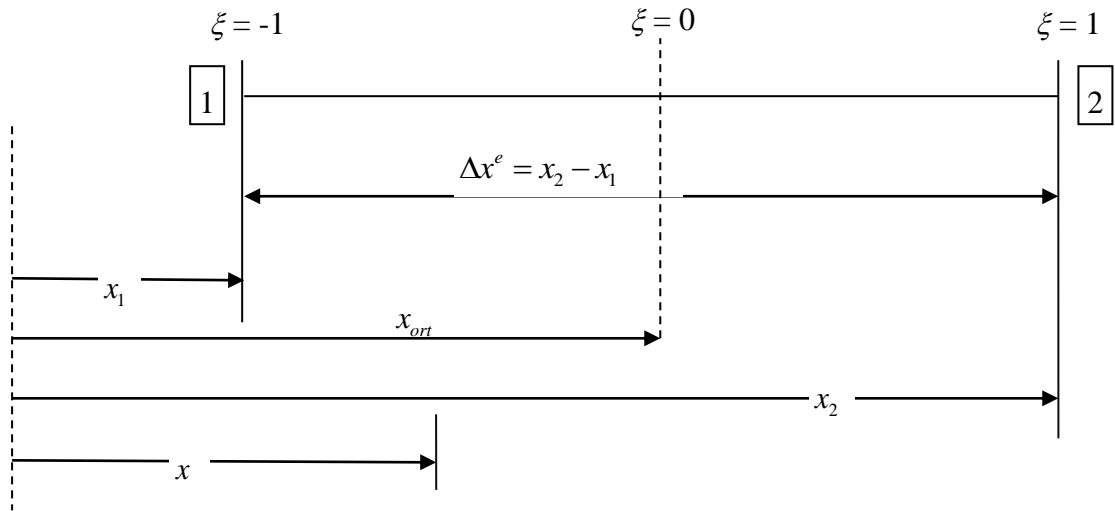
Sonlu elemanlar yönteminin temel fikri çözümü ilgilenilen bölgenin küçük bölgelere (sonlu elemanlar) bölünmesi ve çözümün her bir alt bölge üzerinde basit bir fonksiyonla yaklaştırılmasıyla elde edilir. Bu nedenle, gerekli ve önemli bir adım her elemanda çözüm için basit bir fonksiyon seçmektir. Bir eleman içindeki çözümün davranışını

temsil etmek için kullanılan fonksiyonlar enterpolasyon fonksiyonları, yaklaşım fonksiyonları veya şekil fonksiyonları denir.

Polinom tipi enterpolasyon fonksiyonlarının polinom derecesini artırarak sonuçların doğruluğunu artırmak mümkündür.

Bu çalışmada doğru eksenli bir çubuğun alt bölgelere ayrılması ve her bir alt bölgeyi işaret edecek iki düğüm noktası seçilmektedir.

$I_b(y)$ ve $I_r(y)$ fonksiyonel içerisindeki değişkenler ve bu değişkenlerin birinci türevleri mevcuttur. Her iki büyüklük Şekil 3.2.'de görüldüğü gibi şekil fonksiyonu için büyüklüğü 0 ile 1 arasında olan ($0 \leq \xi \leq 1$) bir dizi boyutsuz sayı ile eleman içindeki herhangi bir noktanın belirtilmesine izin veren yerel koordinat sistemi seçilmiştir.



Şekil 3.2. Şekil fonksiyonu için koordinat takımı

Şekil işlevi için yerel koordinatlarda tanımlanan boyutsuz ve normleştirilmiş bir koordinat sistemi kullanılır. Koordinatlar açısından boyutsuz şekil fonksiyonları olarak verilmiştir:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{1}{2} (1 - \xi) \\ \psi_2 &= \frac{1}{2} (1 + \xi) \end{aligned} \tag{3.71}$$

dır. Bu şekil fonksiyonlarının türevi ise;

$$\begin{aligned}\frac{d\psi_1}{dx} &= \frac{d\psi_1(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = -\frac{1}{L} \\ \frac{d\psi_2}{dx} &= \frac{d\psi_2(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{L}\end{aligned}\quad (3.72)$$

şeklinde hesaplanır. Elemanın düğüm noktalarındaki değişkenler w çökme, ϕ dönme, M , Q iç kuvvetleri olarak seçilirse bu değişkenler ψ_i şekil fonksiyonu ile ifade edilecektir;

$$w = \sum w_i \psi_i \quad , \quad M = \sum M_i \psi_i \quad (3.73)$$

$$\phi = \sum \phi_i \psi_i \quad , \quad Q = \sum Q_i \psi_i$$

Kiriş için eleman matrisinin açık bir formunu vermek için aşağıdaki alt matrisler tanımlanır:

$$\begin{aligned}[k_1] &= \int_{-1}^1 \psi_i \psi_j dx \\ [k_2] &= \int_{-1}^1 \psi_{i,x} \psi_{j,x} dx \\ [k_3] &= \int_{-1}^1 \psi_i \psi_{j,x} dx\end{aligned}\quad (3.74)$$

Burada $i,j = 1,2$ şeklindedir. Bu altdizimler aşağıdaki gibi genişletilmiş biçimde yazılabilir;

$$[k_1] = \begin{bmatrix} \frac{L}{3} & \frac{L}{6} \\ \frac{L}{6} & \frac{L}{3} \end{bmatrix}, \quad [k_2] = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}, \quad [k_3] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\quad (3.75)$$

Böylece, NEBT için sonlu eleman matrisi,

$$[k]_{NEBT} = \begin{bmatrix} w & M \\ [0] & [k_2]^T \\ simetrik & -\alpha [k_1 + \mu k_2] \end{bmatrix}\quad (3.76)$$

NTBT için,

$$[k]_{NTBT} = \begin{bmatrix} w & M & Q & \phi \\ [0] & [0] & [k_3]^T & [0] \\ & -\alpha[k_1 + \mu k_2] & [0] & [k_3] \\ simetrik & & -\beta[k_1 + \mu k_2] & [k_1] \\ & & & [0] \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

elde edilir.

4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI

Bu bölümde yerel olmayan Euler-Bernoulli (NEBT) ve Timoshenko (NTBT) kirişleri için elde edilen fonksiyonellerin karışık sonlu eleman yöntemiyle farklı sınır koşullarına sahip kirişlerin statik analizi yapılmıştır. Çözümlerde yerel olmayan elastisite parametresi μ , L/h oranlarının iki ucu basit mesnetli (SS), iki ucu ankastre mesnetli (CC), bir ucu ankastre bir ucu serbest mesnetli (CF) kirişlerinin üzerindeki etkileri göstermek için çözümler yapılmıştır. Bu çözümlerden NEBT4 için çökme ve moment, NTBT8 için de çökme, moment, dönme ve kesme kuvvetleri hesaplanmıştır. Elemanın düğüm noktalarındaki değişken sayılarına bağlı olarak yerel olmayan Euler-Bernoulli kirişi için NEBT4, yerel olmayan Timoshenko kirişi için NTBT8 kullanılacaktır. Bulunan sonuçlar literatürdeki benzer çalışma sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır. Kolaylık sağlamak için çalışma sonuçları aşağıdaki şekilde boyutsuz hale getirilmiştir.

$$\bar{w} = 100 \frac{EI w}{q_0 L^4} \quad (3.78)$$

Hesaplamalarda kullanılan kirişlerde bazı kabuller yapılmıştır. Kabul edilen bu parametreler;

- $E = 300000000$
- $h = 1, h = 0,5$ ve $h = 0,1$
- $b = 1$
- $L = 10$
- $q = 1$
- Poisson oranı; 0,3
- Malzeme sabiti; $5/6 = 0,833$ alınmıştır.

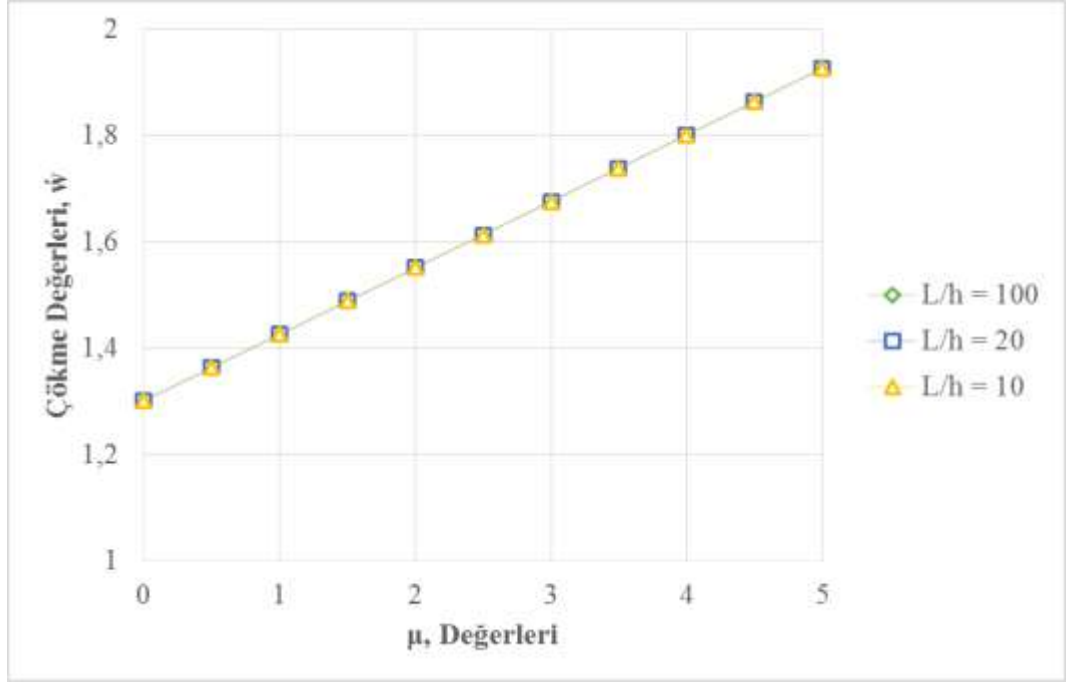
4.1. Basit Mesnetli Kiriş (SS)

Bu bölümde yerel olmayan Euler-Bernoulli kirişleri için yapılan hesaplamalarda,

- μ sayısının artırılması ile yerel olmayan elastisite etkisiyle maksimum çökme ve moment için sonuçlar bulunmuştur.

- Farklı L/h oranlarına sahip yerel olmayan elastisite etkisi altındaki kirişlerde maksimum çökme ve moment elde edilerek literatür çalışmalarıyla sonuçlar karşılaştırılmıştır.

İki ucu basit mesnetli NEBT4 kirişi için $L/h=100$, $L/h=20$ ve $L/h=10$ için hesaplamalar yapılmış olup, sonuçlar Şekil 4.1.'de gösterilmiştir.



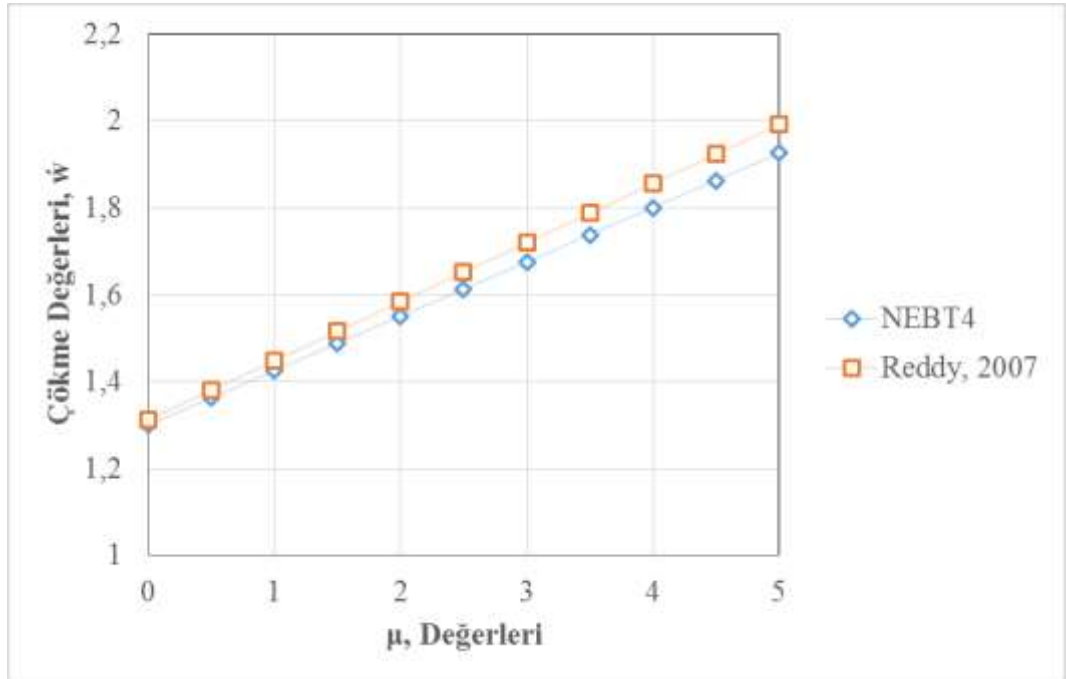
Şekil 4.1. NEBT4 kirişi farklı L/h oranları için maksimum boyutsuz çökme $\left[\bar{w} = -w * 10^2 (EI / q_0 L^4) \right]$ değerleri

Şekil 4.1.'de görüldüğü gibi NEBT4 kirişi için elde edilen sonuçlar doğrultusunda L/h oranının farklı olması sonuçları değiştirmemiştir. İki ucu basit mesnetli NEBT4 kirişi için hesaplanan çökme ve moment değerleri Tablo 4.1.'de yer almaktadır.

Tablo 4.1. NEBT4 kirişi farklı L/h oranları için maksimum boyutsuz çökme ve moment değerleri

μ	\tilde{w}	M
0	1,30118	12,5
0,5	1,36368	12,5
1	1,42618	12,5
1,5	1,48868	12,5
2	1,55118	12,5
2,5	1,61368	12,5
3	1,67618	12,5
3,5	1,73868	12,5
4	1,80118	12,5
4,5	1,86368	12,5
5	1,92618	12,5

Tablo 4.1.'de görüldüğü gibi μ sayısının artırılması çökme değerlerini de arttırmış olup moment değerlerini değiştirmemiştir. Tablo 4.1.'de yer alan NEBT4 kirişi çökme değerleri literatürde yapılan çalışmalarla karşılaştırılmıştır. Şekil 4.2.'de yapılan hesaplamalarla Reddy (2007) tarafından yapılan analitik çözüm sonuçları karşılaştırılmıştır.



Şekil 4.2. NEBT4 kirişi ve Reddy (2007) maksimum boyutsuz çökme değerleri

Şekil 4.2.'de görüldüğü gibi iki ucu basit mesnetli NEBT4 kirişi için elde edilen sonuçlar Reddy'nin sonuçlarına göre daha düşük çıkmıştır. μ sayısının artırılması ile maksimum çökme değeri de artmıştır. Ayrıca L/h oranının farklı olması sonuçları değiştirmemiştir. Grafik değerleri $L/h=20$ ve $L/h=10$ için geçerlidir. Elde edilen sonuçların literatürdeki çalışmalarla karşılaştırılması Tablo 4.2.'de verilmiştir.

Tablo 4.2. NEBT kirişi için literatürde bulunan maksimum boyutsuz çökme değerleri

L/h	μ	NEBT4	Reddy	Aydoğdu	Pradhan	Nguyen
			(2007)	(2009)	(2012)	(2015)
10	0	1,30118	1,3130	1,3130	1,3021	1,3021
	1	1,42618	1,4487	1,4487	1,4271	1,4271
	2	1,55118	1,5844	1,5844	1,5521	1,5521
	3	1,67618	1,7201	1,7201		1,6771
	4	1,80118	1,8558	1,8558		1,8021
	5	1,92618	1,9914			
20	0	1,30118	1,3130	1,3130	1,3021	1,3021
	1	1,42618	1,4487	1,3469	1,4271	1,3333
	2	1,55118	1,5844	1,3808	1,5521	1,3646
	3	1,67618	1,7201	1,4148		1,3958
	4	1,80118	1,8558	1,4487		1,4271
	5	1,92618	1,9914			

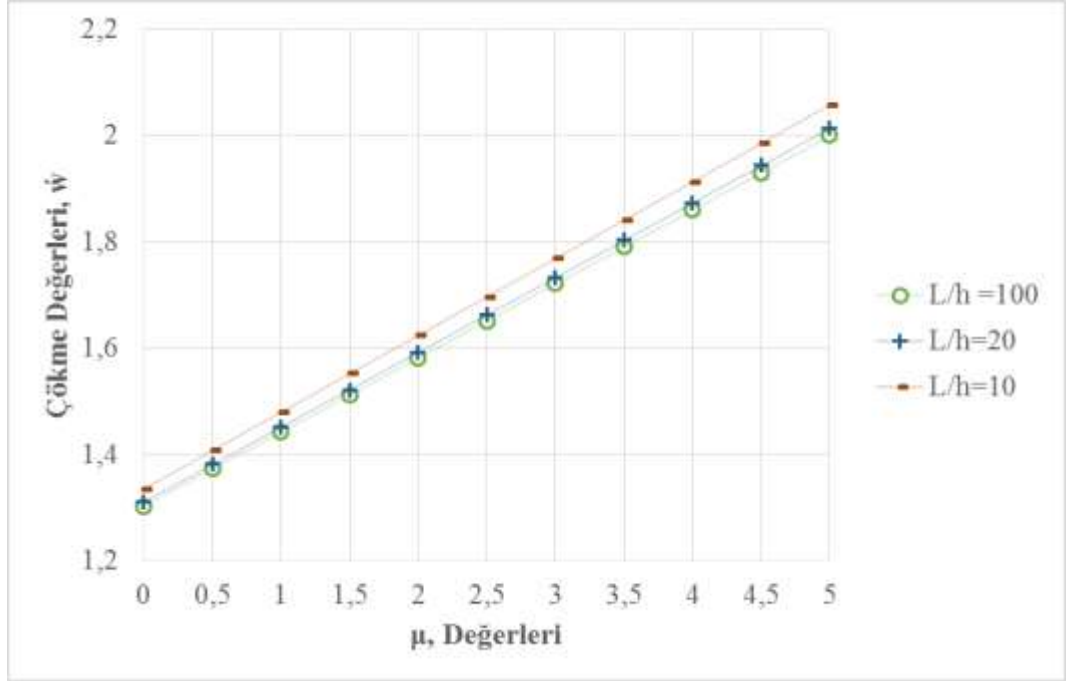
Tablo 4.2.'de görüldüğü gibi, $L/h=10$ için Reddy ve Aydoğdu'nun sonuçları aynı olup, $L/h=20$ için değişkenlik göstermiştir. L/h oranının artması Aydoğdu ve Nguyen'in değerlerini azaltmıştır. $L/h=10$ için Pradhan ve Nguyen'in sonuçları da aynıdır. Aynı zamanda, μ sayısı arttıkça çökme değerleri artmıştır.

Bu bölümde yerel olmayan Timoshenko kirişleri için yapılan hesaplamalarda,

- μ sayısının artırılması ile yerel olmayan elastisite etkisiyle maksimum çökme ve dönme için sonuçlar bulunmuştur.

- Farklı L/h oranlarına sahip yerel olmayan elastisite etkisi altındaki kirişlerde maksimum çökme ve dönme elde edilmiştir. Elde edilen çökme değerleri sonuçları literatür çalışmalarıyla karşılaştırılmıştır.

İki ucu basit mesnetli NTBT8 kirişi için $L/h=100$, $L/h=20$ ve $L/h=10$ için hesaplamalar yapılmış olup, sonuçlar Şekil 4.3.'de gösterilmiştir.



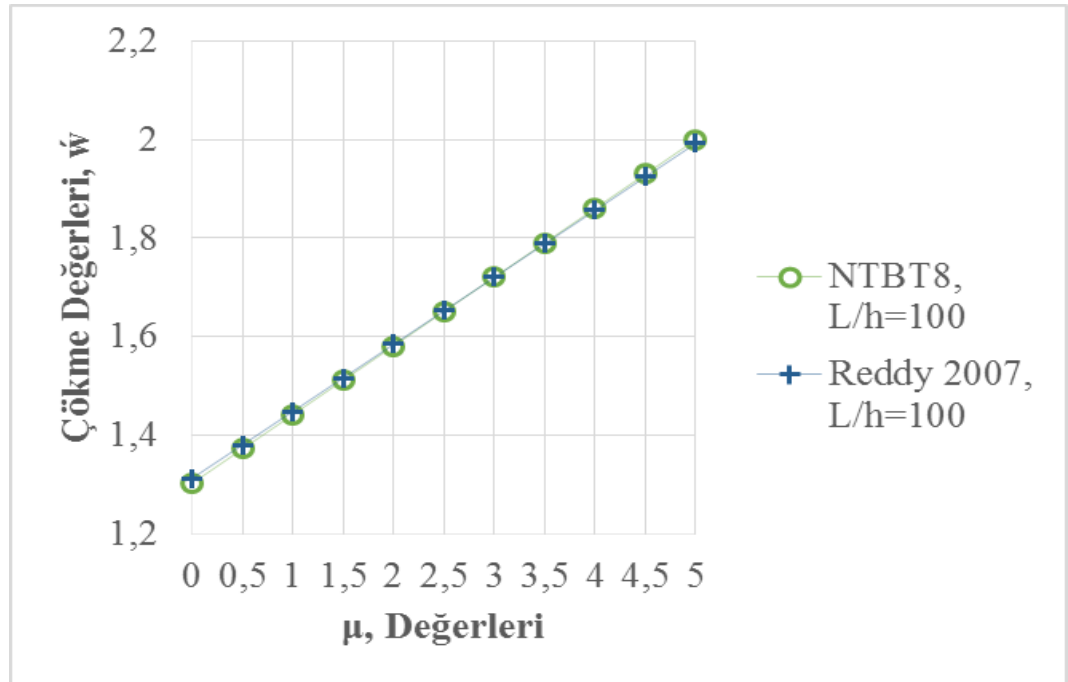
Şekil 4.3. NTBT8 kirişi farklı L/h oranları için maksimum boyutsuz çökme değerleri

Şekil 4.3.'de görüldüğü gibi NTBT8 kirişi için elde edilen sonuçlar doğrultusunda L/h oranının azalması maksimum çökme değerini artırmıştır. Aynı zamanda, μ sayısı arttıkça da çökme değerleri artmıştır. Şekil 4.3.'de gösterilen değerlerin açık ifadesi Tablo 4.3.'de yer almaktadır.

Tablo 4.3. NTBT8 kirişi farklı L/h oranları için elde edilen maksimum boyutsuz çökme değerleri

μ	L/h = 100	L/h = 20	L/h = 10
0	1,3034	1,3112	1,3356
0,5	1,3730	1,3815	1,4078
1	1,4426	1,4517	1,4800
1,5	1,5123	1,5219	1,5522
2	1,5819	1,5922	1,6244
2,5	1,6515	1,6624	1,6966
3	1,7211	1,7327	1,7688
3,5	1,7907	1,8029	1,8409
4	1,8603	1,8731	1,9131
4,5	1,9299	1,9434	1,9853
5	1,9996	2,0136	2,0575

Şekil 4.4.'de görüldüğü gibi iki ucu basit mesnetli NTBT8 kirişi için bulunan çökme değerleri, Reddy'nin sonuçlarıyla kıyaslandığında μ değeri 3'e kadar daha düşük değerler elde edildiği gözlemlenmiştir. Şekil 4.4.'de gösterilen eğrisel değişimin çalışma sonuçları Tablo 4.4.'de verilmiştir.

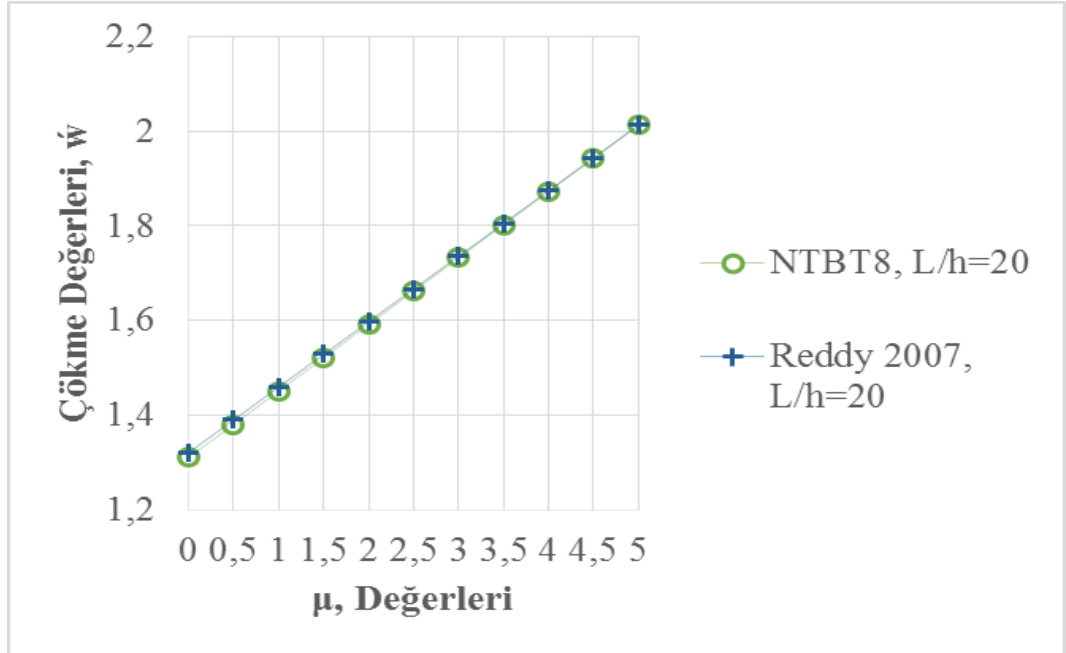


Şekil 4.4. NTBT8 kirişi ve Reddy (2007)'nin L/h = 100 için maksimum boyutsuz çökme değerleri

Tablo 4.4. NTBT8 $L/h = 100$ için maksimum boyutsuz çökme değerleri

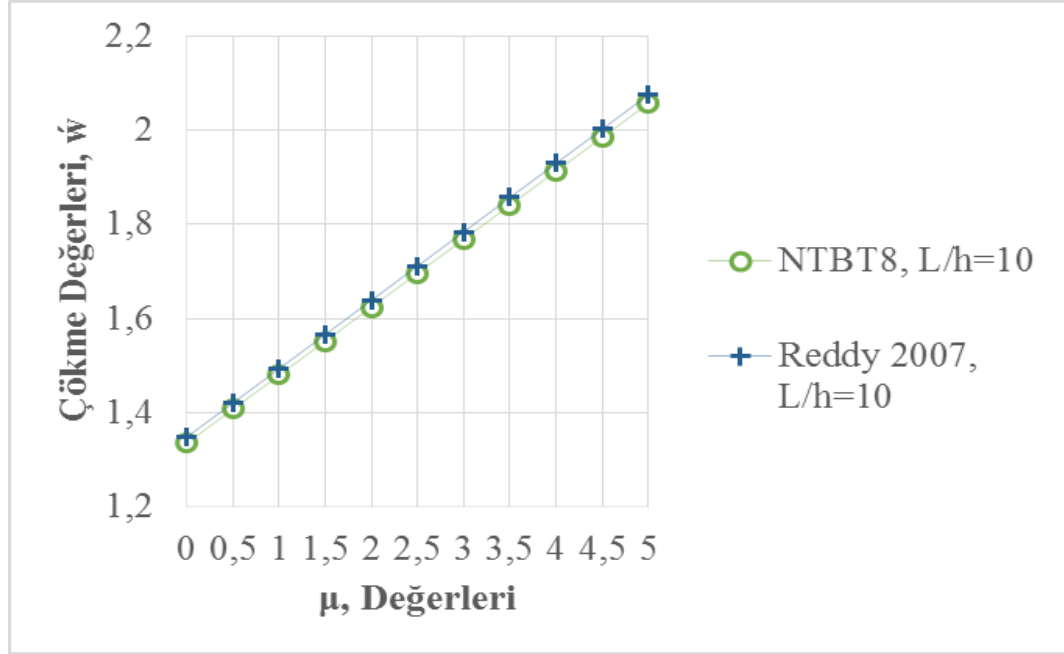
μ	NTBT8	Reddy (2007)
0	1,3034	1,3134
0,5	1,3730	1,3813
1	1,4426	1,4492
1,5	1,5123	1,5170
2	1,5819	1,5849
2,5	1,6515	1,6528
3	1,7211	1,7207
3,5	1,7907	1,7886
4	1,8603	1,8565
4,5	1,9299	1,9244
5	1,9996	1,9923

Tablo 4.4’de verilen sonuçlar doğrultusunda μ sayısı arttıkça çökme değerleri de artmıştır. Yapılan karşılaştırmayla sonuçların hemen hemen aynı çıktığı görülmektedir. $L/h=100$ için yapılan karşılaştırma, $L/h=20$ ve $L/h=10$ için de yapılmış olup Şekil 4.5 ve Şekil 4.6’da verilmiştir.



Şekil 4.5. NTBT8 kirişi ve Reddy (2007)’nin $L/h = 20$ için maksimum boyutsuz çökme değerleri

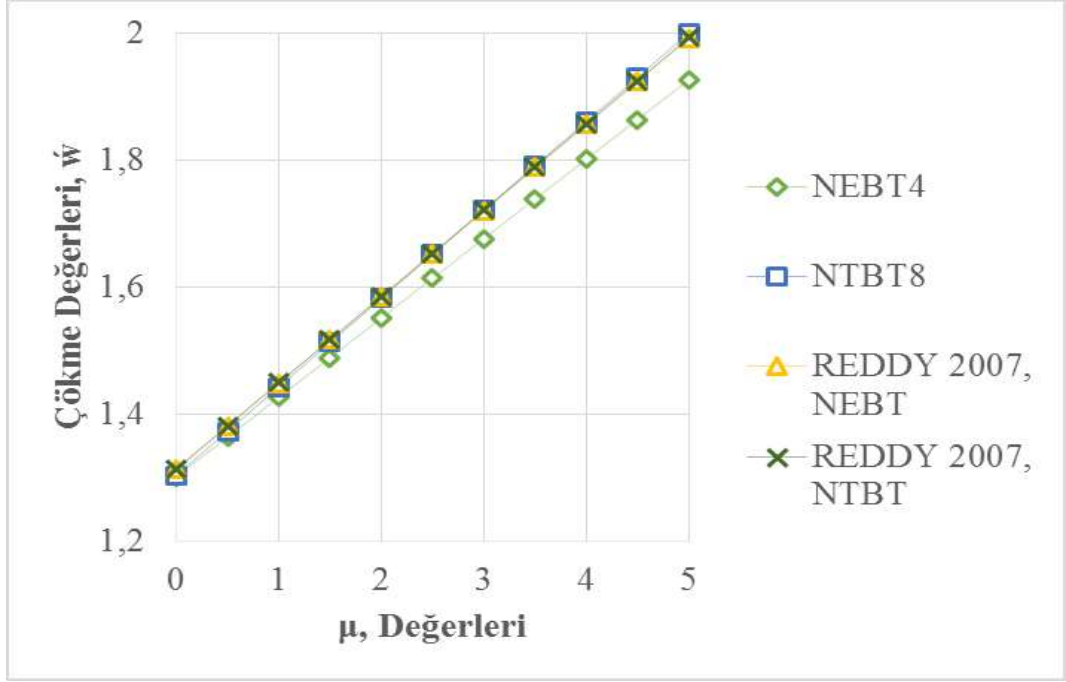
Şekil 4.5.'de görüldüğü gibi bulunan NTBT8 kirişi çökme değerleri, Reddy'nin NTBT kirişi için elde ettiği çökme değerleriyle hemen hemen aynı olduğu gözlemlenmiştir.



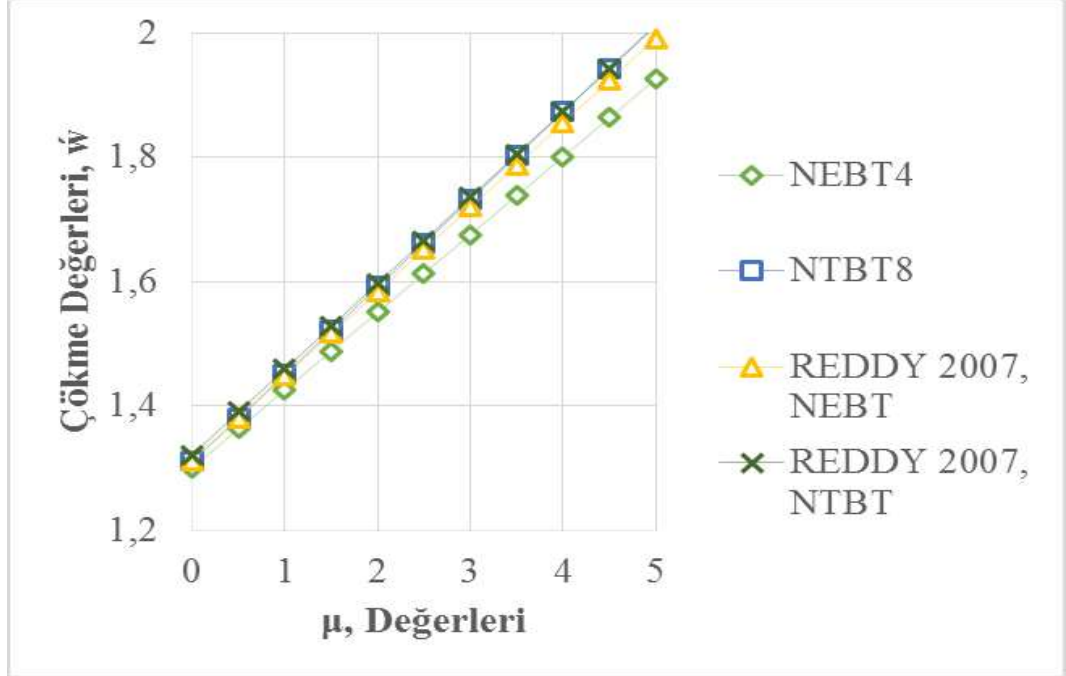
Şekil 4.6. NTBT8 kirişi ve Reddy (2007)'nin $L/h = 10$ için maksimum boyutsuz çökme değerleri

Şekil 4.6.'da görüldüğü gibi bulunan NTBT8 kirişi çökme değerleri ile Reddy'nin NTBT kirişi için elde ettiği çökme değerlerine bakıldığında sonuçlar hemen hemen aynı çıkmıştır. Şekil 4.4., Şekil 4.5. ve Şekil 4.6. çökme değerlerine bakılırsa L/h oranı azaldıkça elde edilen çökme değeri de azalmış olup μ sayısı arttıkça da çökme değerleri artmıştır.

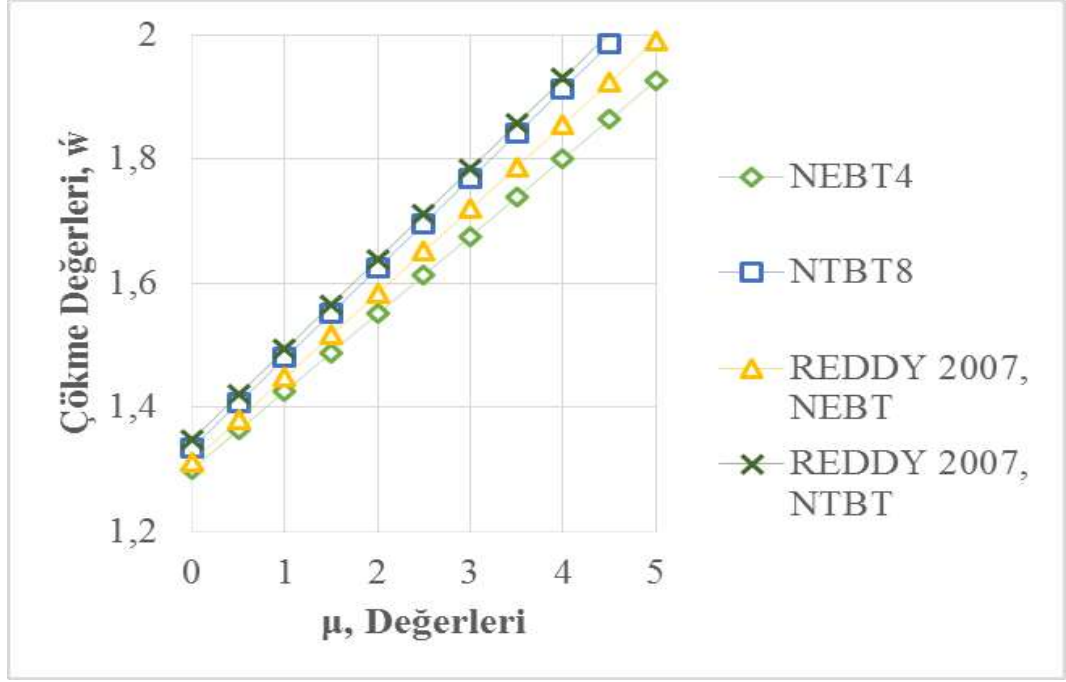
İki ucu basit mesnetli yerel olmayan Euler-Bernoulli ve Timoshenko kirişi için yapılan hesaplamaların karşılaştırılması Şekil 4.7., Şekil 4.8. ve Şekil 4.9.'da verilmiştir. Farklı L/h oranları için boyutsuz çökme değerleri Reddy'nin sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır.



Şekil 4.7. NEBT4, NTBT8 kirişi ve Reddy (2007)'nin $L/h = 100$ için maksimum boyutsuz çökme değerleri



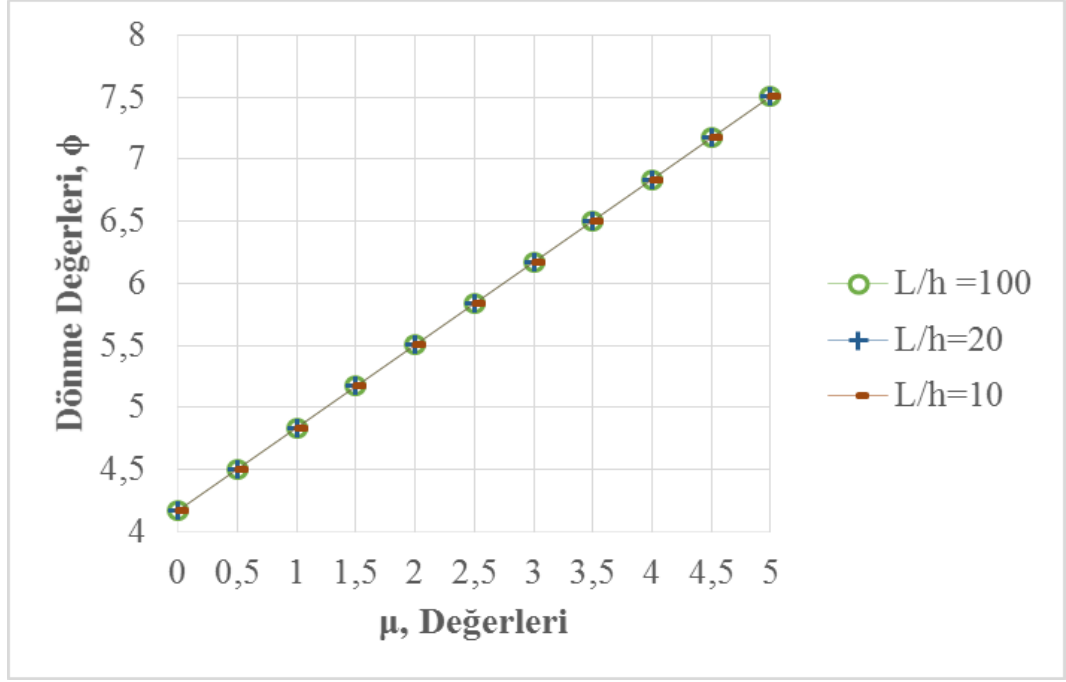
Şekil 4.8. NEBT4, NTBT8 kirişi ve Reddy (2007)'nin $L/h = 20$ için maksimum boyutsuz çökme değerleri



Şekil 4.9. NEBT4, NTBT8 kirişi ve Reddy (2007)'nin $L/h = 10$ için maksimum boyutsuz çökme değerleri

Şekil 4.7., Şekil 4.8. ve Şekil 4.9.'da görüldüğü gibi yerel olmayan Timoshenko kirişinde daha yakın değerler elde edilmiştir. NEBT4 kirişi çökme değerlerinde L/h oranının değişimi sonuçları değiştirmemiş olup, NTBT8 kirişi çökme değerlerinde ise L/h oranının azalması çökme değerlerinde artışa sebep olmuştur. İki kiriş teorisinde de μ sayısının artırılması çökme değerlerini de arttırmıştır.

NTBT8 kirişi için hesaplanan dönme değerleri $L/h = 100$, $L/h = 20$ ve $L/h = 10$ için elde edilmiş olup, sonuçların eğrisel ifadesi Şekil 4.10.'da verilmiştir.



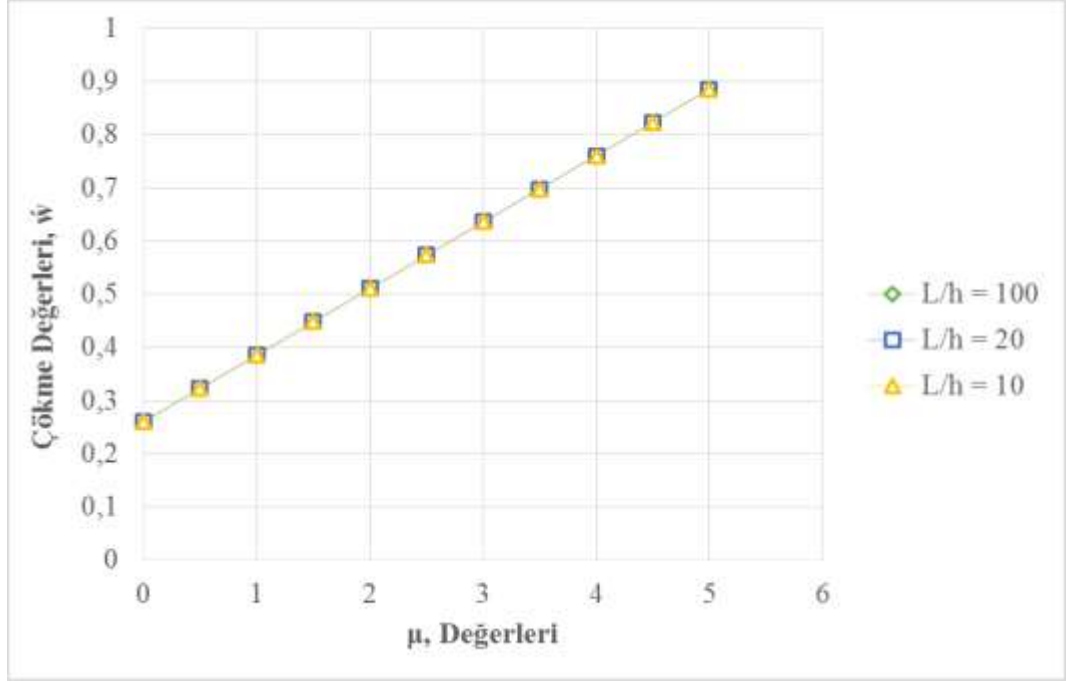
Şekil 4.10. NTBT8 kirişi için maksimum boyutsuz dönme değerleri

Şekil 4.10.'da görüldüğü gibi NTBT8 kirişi dönme değerlerinde L/h oranının değişimi sonuçları değiştirmemiştir. $L/h=100$, $L/h=20$ ve $L/h=10$ için aynı sonuçlar elde edilmiştir. Ancak μ sayısının artması ile dönme değerleri de artmıştır.

4.2. Ankastre Kiriş (CC)

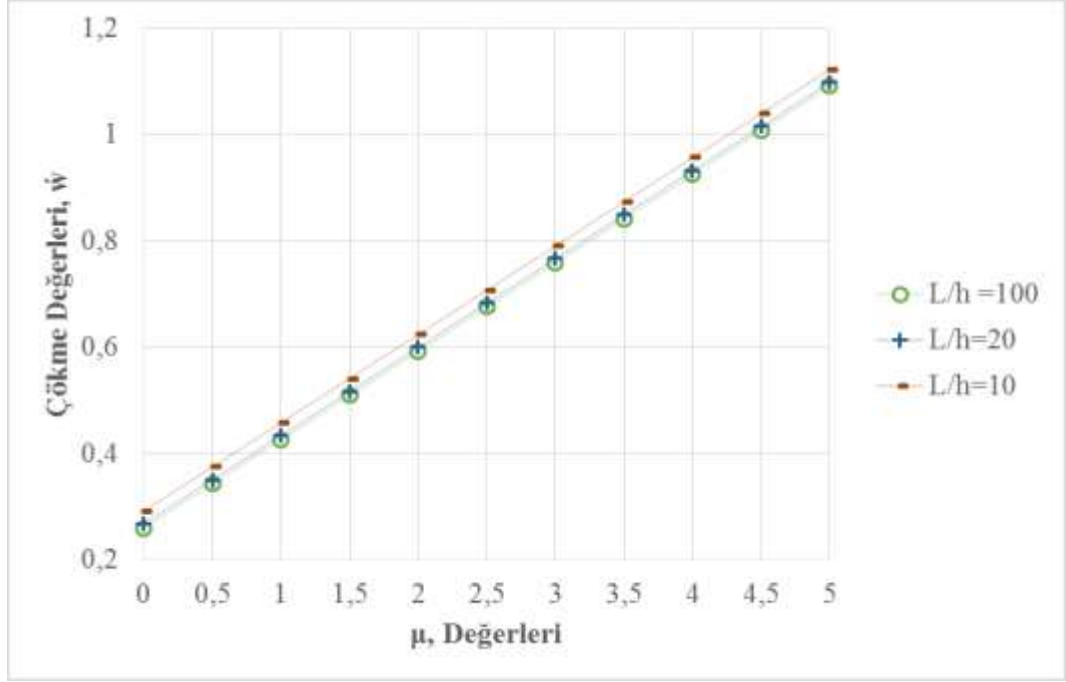
Düzgün yayılı yük etkisindeki iki ucu ankastre mesnetli kiriş için çökme ve dönme değerleri NEBT4 ve NTBT8 için sonlu elemanlar yöntemiyle bulunmuş olup literatürdeki sonuçlar ile karşılaştırılmıştır.

NEBT4 kirişi için elde edilen çökme değerleri $L/h=100$, $L/h=20$ ve $L/h=10$ için elde edilmiş olup Şekil 4.11.'de gösterilmiştir.



Şekil 4.11. NEBT4 kirişi farklı L/h oranları için maksimum boyutsuz çökme değerleri

Şekil 4.11’de görüldüğü gibi iki ucu ankastre mesnetli NEBT4 kirişi için elde edilen sonuçlar doğrultusunda L/h oranının farklı olması sonuçları değiştirmemiş olup, μ sayısının artması çökme değerlerinde artışa sebep olmuştur. Aynı şekilde NTBT8 kirişi için elde edilen çökme değerleri $L/h=100$, $L/h=20$ ve $L/h=10$ için elde edilmiş olup Şekil 4.12.’de gösterilmiştir.



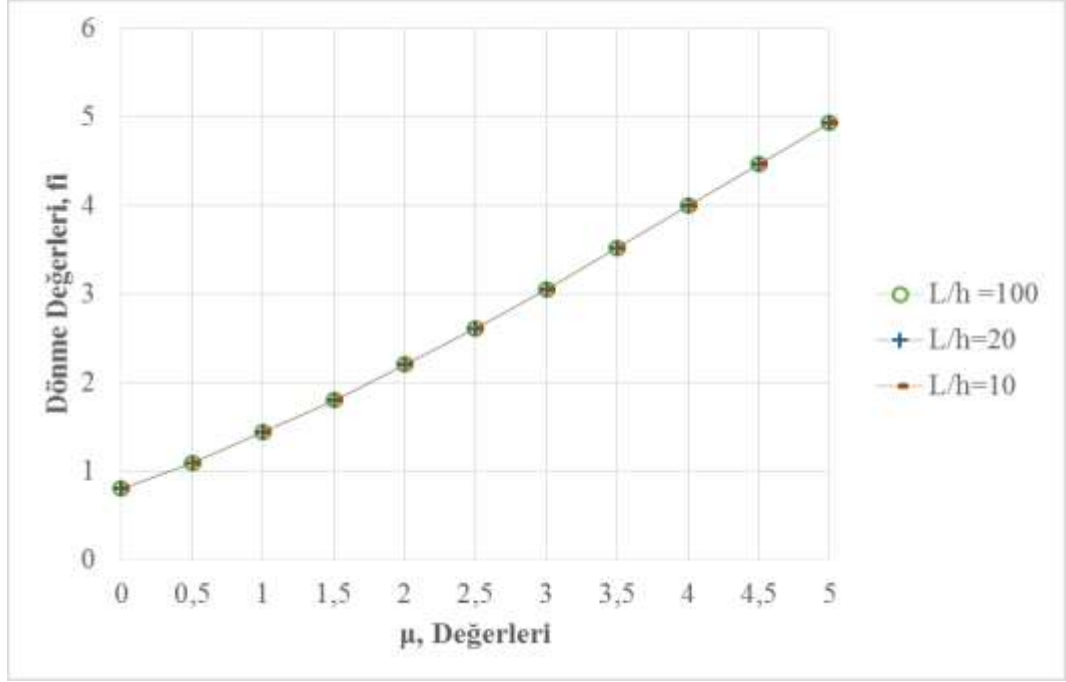
Şekil 4.12. NTBT8 kirişi farklı L/h oranları için maksimum boyutsuz çökme değerleri

Şekil 4.12.'de görüldüğü gibi iki ucu ankastre mesnetli NTBT8 kirişi için elde edilen sonuçlar doğrultusunda L/h oranının azalması ve μ sayısının artması ile çökme değerleri artmıştır. NTBT8 kirişi için farklı L/h oranlarıyla dönme değerleri hesaplanmış olup, elde edilen sonuçların eğrisel değişimi Şekil 4.13.'de gösterilmiştir. Hesaplamalar $L/h=100$, $L/h=20$ ve $L/h=10$ için yapılmıştır.

İki ucu ankastre mesnetli kirişe ait analitik olarak elastik eğrinin dönüm noktası,

$$z = \left(1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \frac{1}{2} \quad (3.79)$$

şeklinde bulunmaktadır.



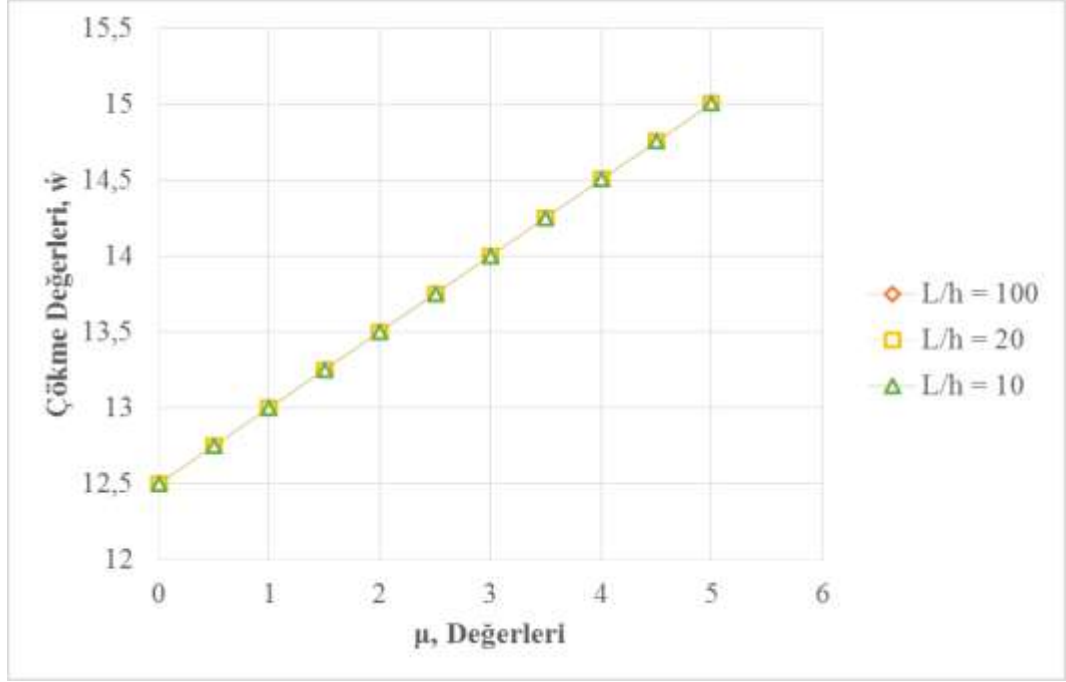
Şekil 4.13. NTBT8 kirişi için maksimum boyutsuz dönme değerleri

Şekil 4.13.'de görüldüğü gibi iki ucu ankastre mesnetli NTBT8 kirişinde L/h oranının azalması ve μ sayısının artması dönme değerlerinin artmasına sebep olmuştur.

4.3. Bir Ucu Ankastre Bir Ucu Serbest Kiriş (CF)

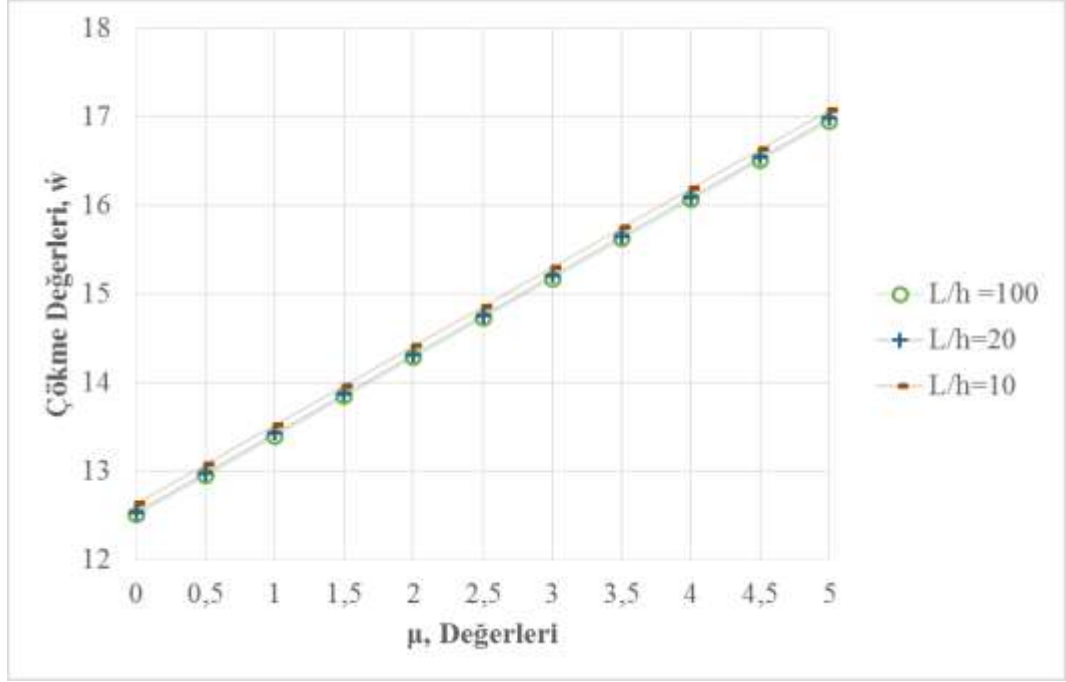
Düzensiz yayılı yük etkisindeki bir ucu ankastre bir ucu serbest mesnetli kiriş için çökme ve dönme değerleri NEBT4 ve NTBT8 için sonlu elemanlar yöntemiyle bulunmuş olup literatürdeki sonuçlar ile karşılaştırılmıştır.

NEBT4 kirişi için elde edilen çökme değerleri $L/h=100$, $L/h=20$ ve $L/h=10$ için elde edilmiş olup Şekil 4.14.'de gösterilmiştir.



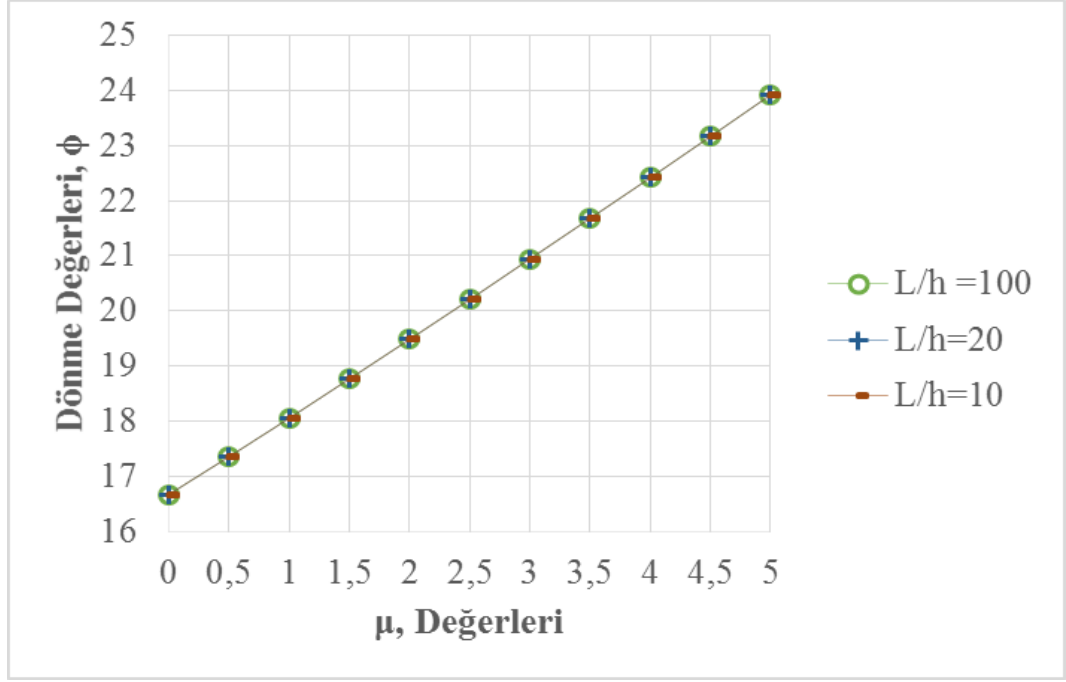
Şekil 4.14. NEBT4 kirişi farklı L/h oranları için maksimum boyutsuz çökme değerleri

Şekil 4.14’de görüldüğü gibi bir ucu ankastre bir ucu serbest mesnetli NEBT4 kirişi için elde edilen sonuçlar doğrultusunda L/h oranının farklı olması sonuçları değiştirmemiş olup, μ sayısının artması çökme değerlerinde artışa sebep olmuştur. Aynı şekilde, NTBT8 kirişi için elde edilen çökme değerleri $L/h=100$, $L/h=20$ ve $L/h=10$ için elde edilmiş olup Şekil 4.15.’de gösterilmiştir.



Şekil 4.15. NTBT8 kirişi farklı L/h oranları için maksimum boyutsuz çökme değerleri

Şekil 4.15’de görüldüğü gibi bir ucu ankastre bir ucu serbest mesnetli NTBT8 kirişi için elde edilen sonuçlar doğrultusunda L/h oranının azalması ve μ sayısının artması çökme değerlerinin artmasına sebep olmuştur. NTBT8 kirişi için farklı L/h oranlarıyla dönme değerleri hesaplanmış olup, elde edilen sonuçların eğrisel değişimi Şekil 4.16.’da gösterilmiştir. Hesaplamalar $L/h=100$, $L/h=20$ ve $L/h=10$ için yapılmıştır.



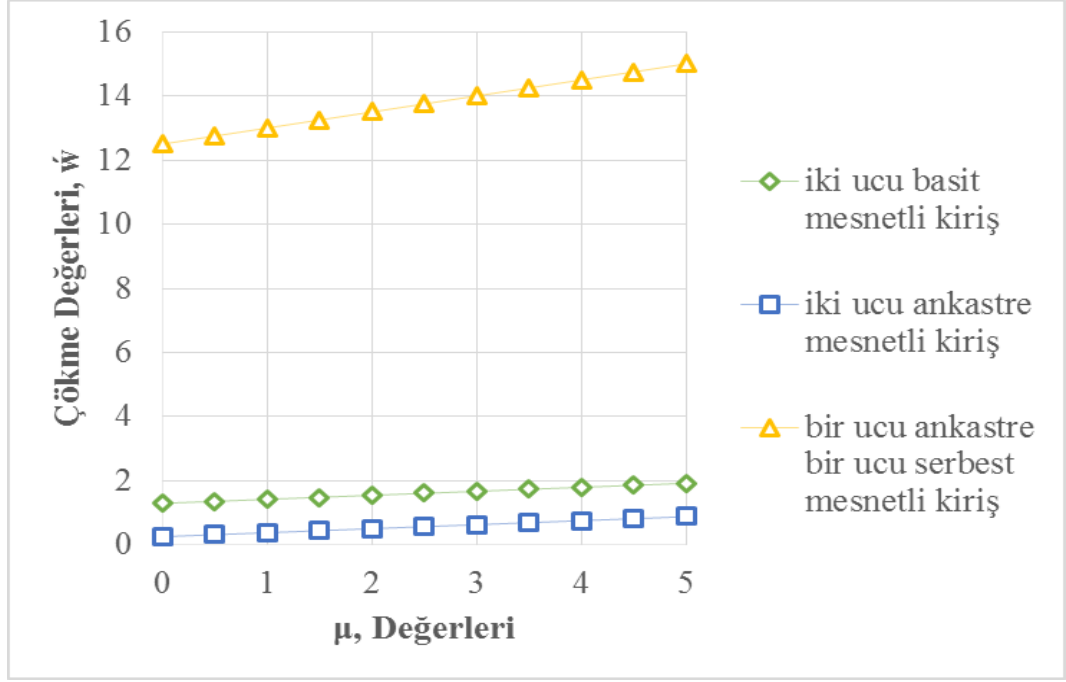
Şekil 4.16. NTBT8 kirişi için maksimum boyutsuz dönme değerleri

Şekil 4.16'da görüldüğü gibi bir ucu ankastre bir ucu serbest mesnetli NTBT8 kirişi dönme değerlerinde L/h oranının değişimi sonuçları değiştirmemiştir. μ sayısının artması dönme değerlerinin artmasına sebep olmuştur.

4.4. SS, CC Ve CF'nin Karşılaştırılması

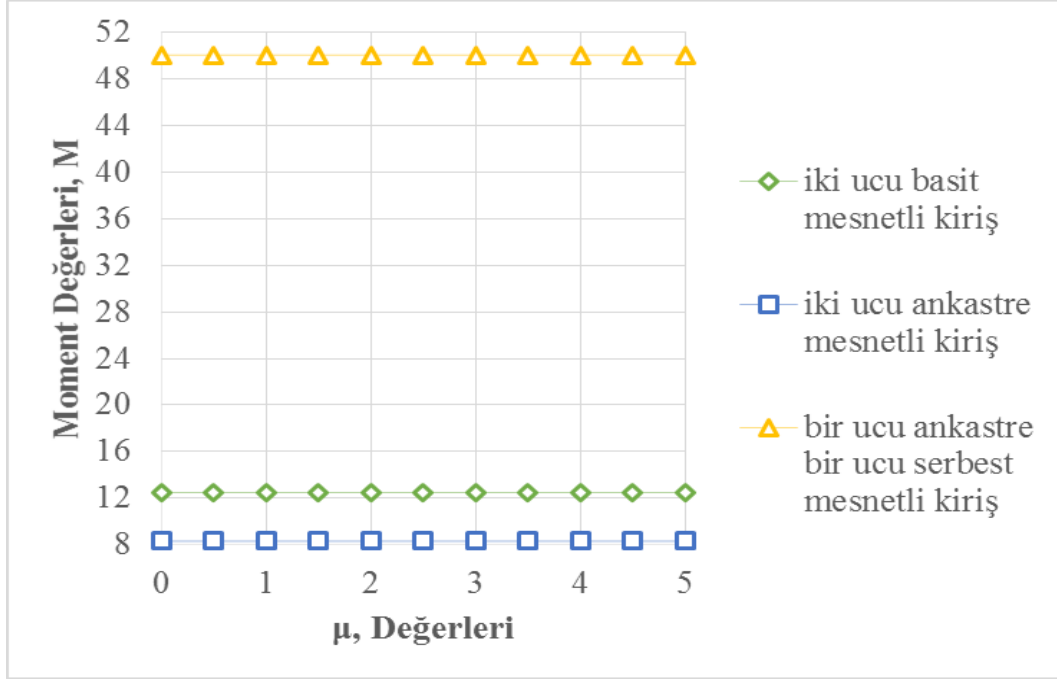
Düzenli yayılı yük etkisindeki iki ucu basit mesnetli (SS), iki ucu ankastre mesnetli (CC) ve bir ucu ankastre bir ucu serbest mesnetli (CF) kirişlerinin karşılaştırılması yapılmıştır. Yerel olmayan Euler-Bernoulli ve Timoshenko kirişi için sonuçlar elde edilmiştir.

NEBT4 kirişi çökme değerleri farklı L/h oranlarıyla SS, CC ve CF için yapılan hesaplamaların eğrisel değişimi Şekil 4.17.'de görülmektedir.



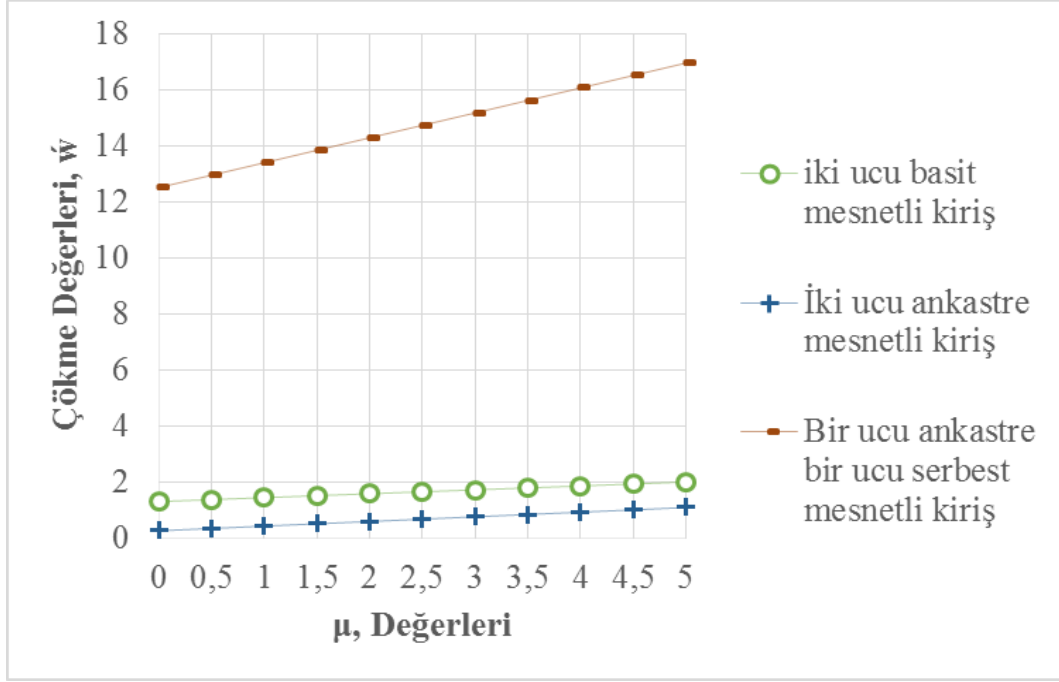
Şekil 4.17. NEBT4 kirişi farklı L/h oranları için maksimum boyutsuz çökme değerleri

Şekil 4.17'deki değerler $L/h=100$, $L/h=20$ ve $L/h=10$ için geçerlidir. NEBT4 kirişi moment değerleri, farklı L/h oranlarıyla SS, CC ve CF için yapılan hesaplamaların eğrisel değişimi de Şekil 4.18.'de görülmektedir.

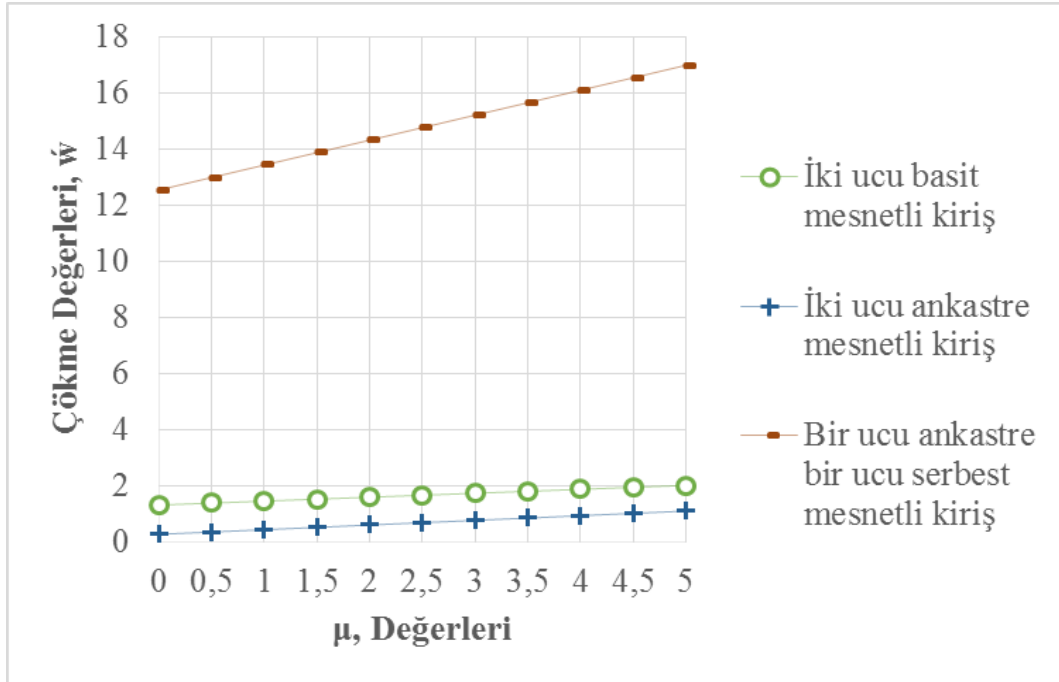


Şekil 4.18. NEBT4 kirişi farklı L/h oranları için maksimum boyutsuz moment değerleri

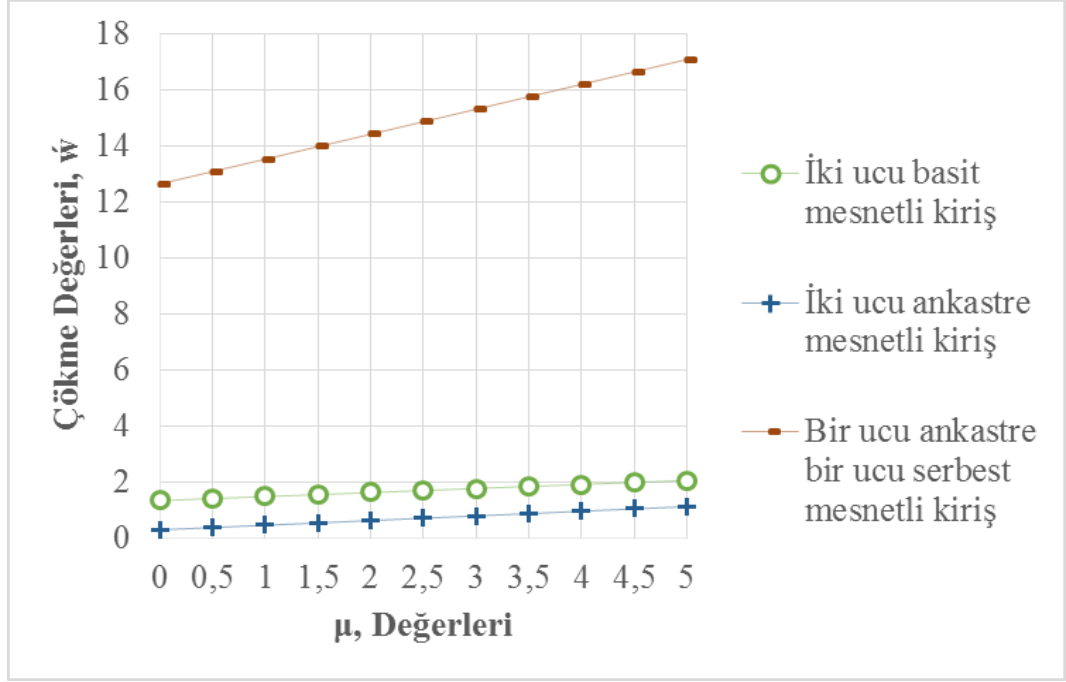
Şekil 4.18.'de görüldüğü gibi NEBT4 kirişi için elde edilen sonuçlar doğrultusunda L/h oranının farklı olması sonuçları değiştirmemiştir. Sonuçlar $L/h=100$, $L/h=20$ ve $L/h=10$ için geçerlidir. Yapılan moment değeri hesaplamalarında μ sayısının artırılması sonuçları değiştirmemiştir. Aynı şekilde, NTBT8 kirişi çökme değerleri farklı L/h oranlarıyla SS, CC ve CF için yapılan hesaplamaların eğrisel değişimi Şekil 4.19., Şekil 4.20. ve Şekil 4.21.'de görülmektedir.



Şekil 4.19. NTBT8 kirişi $L/h = 100$ için maksimum boyutsuz çökme değerleri



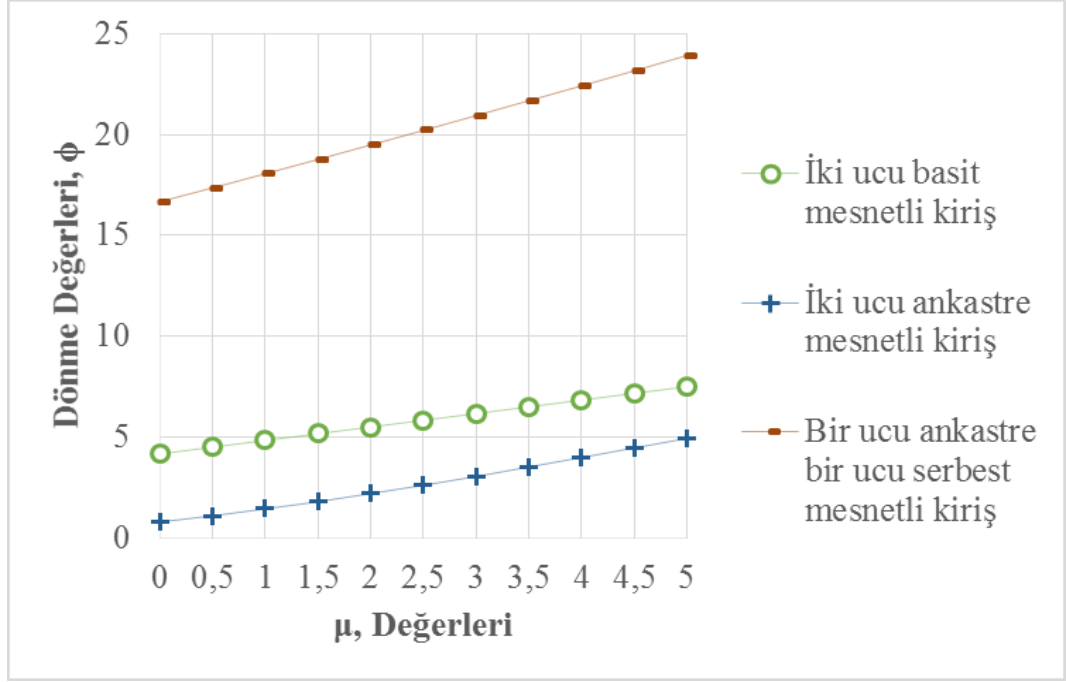
Şekil 4.20 NTBT8 kirişi $L/h = 20$ için maksimum boyutsuz çökme değerleri



Şekil 4.21. NTBT8 kirişi $L/h = 10$ için maksimum boyutsuz çökme değerleri

Şekil 4.19., Şekil 4.20. ve Şekil 4.21.'de görüldüğü gibi $L/h=100$, $L/h=20$ ve $L/h=10$ için hesaplamalar yapılmış olup, NTBT8 kirişi çökme değeri sonuçları verilmiştir.

NTBT8 kirişi dönme değerleri farklı L/h oranlarıyla SS, CC ve CF için yapılan hesaplamaların eğrisel değişimi Şekil 4.22.'de görülmektedir.



Şekil 4.22. NTBT8 kirişi farklı L/h oranları için boyutsuz maksimum dönme değerleri

Şekil 4.22.'deki değerler $L/h=100$, $L/h=20$ ve $L/h=10$ için geçerli olup, gösterilen eğrisel değişimin açık ifadesi Tablo 4.5.'de verilmiştir.

Tablo 4.5. NTBT8 kirişi için elde edilen maksimum dönme değerleri

fi	SS	CC	CF
0	4,1715	0,26014	16,676
0,5	4,5048	0,34318	17,361
1	4,8381	0,42623	18,057
1,5	5,1715	0,50927	18,771
2	5,5048	0,59232	19,487
2,5	5,8381	0,67536	20,208
3	6,1715	0,75841	20,944
3,5	6,5048	0,84145	21,679
4	6,8381	0,9245	22,414
4,5	7,1715	1,0075	23,163
5	7,5048	1,0906	23,917

Tablo 4.5.'de görüldüğü gibi düzgün yayılı yük etkisindeki CF kirişinde daha fazla dönme değeri elde edilmiştir. En az dönme değerleri CC kirişinde hesaplanmıştır.

5. SONUÇ

Bu çalışmada, Eringen'in yerel olmayan bünye denklemleri kullanılarak Euler-Bernoulli ve Timoshenko kirişlerine ait alan denklemleri, geometrik ve sınır koşulları virtüel yer değiştirme ilkesine dayalı olarak elde edilmiştir. Operatör formda ifade edilen alan denklemlerine Gâteaux türevi yaklaşımı kullanılarak yerel olmayan Euler-Bernoulli ve Timoshenko kirişlerine ait yeni fonksiyonel dinamik ve geometrik sınır koşulları ile birlikte elde edilmiştir. Yerel olmayan kiriş teorilerine dayalı statik analizler karışık sonlu elemanlar formülasyonu kullanılarak incelenmiştir. Bu fonksiyonel kullanılarak yerel olmayan kirişlerin karışık sonlu elemanlar yöntemiyle çözülebilmesi için çökme, dönme, eğilme momenti ve kesme kuvvetlerinin bilinmeyen olarak tanımlandığı Euler-Bernoulli kirişi için 4 serbest dereceli NEBT4, Timoshenko kirişi için 8 serbest dereceli NTBT8 sonlu eleman formülasyonu elde edilmiştir. Yapılan sayısal çözümlerin sonucunda yerel olmayan Euler-Bernoulli ve Timoshenko kirişlerine ait sırasıyla çökme, eğilme momenti ve çökme, dönme, kesme kuvveti ve eğilme momenti büyüklükleri aynı anda elde edilmiştir. Yapılan sayısal çözümlerin sonuçları literatürde bulunan benzer çalışmaların ve analitik çözümlerin sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır. Sonuçların birbirleriyle üst üste düştüğü görülmüştür. Bu çalışmanın amacı ve verimliliği yönünden elde edilen sonuçları özetleyecek olursak;

Yerel olmayan Euler-Bernoulli ve Timoshenko kirişlerine ait alan denklemlerine Gâteaux diferansiyeli metodu uygulanarak bu kirişlere ait fonksiyonel elde edilmiştir. Gâteaux diferansiyel yaklaşımını kullanarak alan denklemlerinin uyumluluğu kontrol edilmiş ve sınır koşulları ile birlikte sağlam olarak fonksiyonellere yansıtılmıştır.

NEBT4 ve NTBT8 için elde edilen fonksiyoneller kullanılarak yerel olmayan kirişlerin karışık sonlu elemanlar yöntemiyle statik analizleri yapılmıştır.

Yapılan statik analizlerde yerel olmayan Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş teorilerine dayalı iki ucu basit mesnetli, iki ucu ankastre mesnetli ve bir ucu ankastre bir ucu serbest mesnet durumları için;

İki ucu basit mesnetli NEBT4 kirişi için çökme ve moment değerleri, NTBT8 kirişi için çökme ve dönme sonuçları elde edilmiştir.

- μ 'nün her değeri için L / h oranındaki değişim incelendiğinde NEBT4 için çökme ve moment sonuçlarının değişmediği NTBT8 kirişinde ise dönme sonuçlarını değiştirmezken, L / h oranının azalması çökme değerlerinin artmasına yol açmıştır.
- μ 'nün her değeri için L / h oranları Reddy (2007)'nin elde ettiği analitik sonuçlarla kıyaslandığında çözümlerin yakın olduğu gözlemlenmiştir.
- NEBT4 ve NTBT8 kirişinde μ 'nün her değeri için L / h oranındaki değişime bağlı olarak çökme sonuçları kıyaslandığında NTBT8 kirişinde daha fazla çökme değeri gözlenmiştir.
- Yerel olmayan elastisite parametresi μ 'nün artırılması ile NEBT4 kirişi için çökme, NTBT8 kirişi için çökme ve dönme sonuçları da artmıştır. μ 'nün değişimi NEBT4 kirişi için bulunan moment değerlerini değiştirmemiştir.

İki ucu ankastre mesnetli NEBT4 kirişi için çökme değerleri, NTBT8 kirişi için çökme ve dönme sonuçları elde edilmiştir.

- μ 'nün her değeri için L / h oranındaki değişim incelendiğinde NEBT4 için çökme sonuçlarının değişmediği NTBT8 kirişinde ise L / h oranının azalması çökme değerlerinin artmasına yol açmıştır.
- NTBT8 kirişinde büküm noktasındaki dönme değerlerine bakıldığında μ 'nün her değeri için L / h oranının değişimi dönme değerlerini değiştirmemiştir.

Bir ucu ankastre bir ucu serbest mesnetli NEBT4 kirişi için çökme değerleri, NTBT8 kirişi için çökme ve dönme sonuçları elde edilmiştir.

- μ 'nün her değeri için L / h oranındaki değişim incelendiğinde NEBT4 için maksimum çökme sonuçlarının değişmediği NTBT8 kirişinde ise L / h oranının azalması maksimum çökme değerlerinin artmasına yol açmıştır.
- NTBT8 kirişinde büküm noktasındaki maksimum dönme değerlerine bakıldığında μ 'nün her değeri için L / h oranının değişimi maksimum dönme değerlerini değiştirmemiştir.

- SS, CC ve CF için yapılan hesaplamalar karşılaştırılmış olup iki kiriş teorisinde de maksimum noktalarındaki çökme ve dönme sonuçlarında, CC değerlerinin daha az, CF değerlerinin de daha fazla olduğu gözlemlenmiştir.
- Analizlerde yerel olmayan Euler-Bernoulli kirişlerinin yerel olmayan Timoshenko kirişlerinden daha az çökme yaptığı görülmüştür.

Bundan sonraki çalışmalarda, yerel olmayan elastisite teorisine dayalı yüksek mertebeden kayma deformasyon teorilerine dayalı statik ve dinamik çözümlerin yapılması düşünülmektedir. İki kiriş teorisi için de titreşim hesabı yapılması düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

- Aköz, A. Y. (1985). A new functional for and its applications. National Mechanics Meeting, Gebze, Turkey, pp. 100-112.
- Aköz, A. Y. (1989). IVth National Applied Mechanics Meeting. Kirazlıyayla, Turkey, pp. 74-85.
- Aköz, A. Y., Ertepinar, A., Demiray, H., İnan, E., Aksoğan, O. (1987). Şekil değiştirebilen cisimler mekaniği. Trabzon.
- Aköz, A. Y., Omurtag, M. H., Doğruoğlu, A. N. (1991). The mixed finite element formulation for three-dimensional bars. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 28, 225-34.
- Aköz, A. Y., Özütok, A. (2000). A functional for shells of arbitrary geometry and a mixed finite element method for parabolic and circular cylindrical shells. *Int. J. Numeric Methods Eng.*, 47(12), 1933-1981.
- Aköz, A. Y., Kadioglu, F. (1996). The mixed finite element solution of circular beam on elastic foundation. *Comput. Struct.*, 60(4), 643-651.
- Aköz, A. Y., Kadioglu, F. (1999). The mixed finite element method for the quasi-static and dynamic analysis of viscoelastic Timoshenko beams. *J. Numeric Methods Eng.*, 44(12), 1909-1932.
- Aydogdu, M. (2009). A general nonlocal beam theory: Its application to nanobeam bending, buckling and vibration, *Physica E*, 41, 1651-1655.
- Bathe, J. (1982). *Finite element procedures in engineering analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Eltaher, M. A., Alshorbagy, A. E., Mahmoud, F. F. (2012). Vibration analysis of Euler-Bernoulli nanobeams by using finite element method. *Applied Mathematical Modelling*,
- Eltaher, M. A., Alshorbagy, A. E., Mahmoud, F. F. (2013). Vibration analysis of Euler-Bernoulli nanobeams by using finite element method. *Applied Mathematical Modelling*, 37, 4787-4797.
- Eltaher, M. A., Emam, S. A., Mahmoud, F. F. (2013). Static and stability analysis of nonlocal functionally graded nanobeams. *Composite Structures*, 96, 82-88.
- Emam, S. A. (2013). A general nonlocal nonlinear model for buckling of nanobeams. *Applied Mathematical Modelling*, 37, 6929-6939.
- Eratlı, N., Aköz, A. Y. (1997). The mixed finite element formulation for the thick plates on elastic foundations. *Comput. Struct.*, 65(4), 515-529.
- Eratlı, N., Aköz, A. Y. (2002). Free vibration analysis of Reissner plates by mixed finite element. *Struct. Eng. Mech.*, 13(3), 277-298.
- Eringen, A. C. (1972). Nonlocal polar elastic continua. *Int. J. Eng. Sci.* 10, 1-16.
- Eringen, A. C. (2002). *Nonlocal continuum field theories*. Springer-Verlag, New York.
- Eringen, A. C. (1983). On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves. *Journal of Applied Physics*, 54, 4703-4710.

- Eringen, A. C., Edelen, D. G. B. (1972). On nonlocal elasticity, *Int. J. Eng. Sci.* 10, 233-248.
- Frey, W. H. (1977). Flexible finite-difference stencils from isoparametric finite elements. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 11, 1653-1665.
- Ghannadpour, S. A. M., Mohammadi, B., Fazilati, J. (2013). Bending, buckling, and vibration problems of nonlocal Euler beams using Ritz method, *Composite Structures*. 96, 584-589.
- Hughes, T. (1987). *The finite element method*. Prentice-Hall, New Jersey.
- Li, L., Hu, Y. (2015). Buckling analysis of size-dependent nonlinear beams based on a nonlocal strain gradient theory. *Int. J. Eng. Sci.* 97, 84-94.
- Nguyen, N-T., Kim, N., Lee, J. (2015). Mixed finite element analysis of nonlocal Euler-Bernoulli nanobeams. *Finite Elements in Analysis and Design*, 106, 65-72.
- Oden, J. T., Reddy, J. N. (1976). *Variational methods in theoretical mechanics*. Springer-Verlog, NewYork.
- Omurtag, M. H., Aköz, A. (1992). The mixed finite element solution of helical beams with variable cross-section under arbitrary loading. *Compos Struct.* 43, 325-31.
- Omurtag, M. H., Aköz, A. Y. (1993). *Comput. Struct.* 49.
- Omurtag, M. H., Özütok, A., Aköz, A. Y., Özcelikors, Y. (1997). *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 40, 295-317.
- Özçelikörs, Y., Omurtag, M. H., Demir, H. (1997). *Comput. Struct.* 62, 93-106.
- Özütok, A. (1999). Genel kabuklara ait fonksiyonel ve parabolik silindir kabuklar için karma sonlu eleman formülasyonu. Doktora tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Özütok, A., Madenci, E. (2013). Free vibration analysis of cross-ply laminated composite beams by mixed finite element formulation. *Int. J. Struct. Stab. Dyn.* 13(02), 1250056.
- Özütok, A., Madenci, E., Kadioğlu, F. (2014). Free vibration analysis of angle-ply laminate composite beams by mixed finite element formulation using the Gateaux differential. *Sci. Eng. Compos. Mater.* 21(2), 257-266.
- Peddieson, J., Buchanan, G. R., McNitt, R. P. (2003). Application of nonlocal continuum models to nanotechnology, *International Journal of Engineering Science*, 41(3-5), 305-312.
- Phadikar, J. K., Pradhan, S. C. (2010). Variational formulation and finite element analysis for nonlocal elastic nanobeams and nanoplates. *Comput. Mater. Sci.* 49, 492-499.
- Pradhan, S. C., Mandal, U. (2013). Finite element analysis of CNTs based on nonlocal elasticity and Timoshenko beam theory including thermal effect. *Physica E*, 53, 223-232.
- Pradhan, S. C., Phadikar, J. K. (2009). *Phys. Lett. A* 373, 1062.
- Pradhan, S. C., Phadikar, J. K. (2009). *Struct. Eng. Mech. – An Int. J.* 33, 193.

- Rao S. S. (2018). The finite element method in engineering. Department of Mechanical and Aerospace Engineering University of Miami, Coral Gables, FL, United States.
- Reddy, J. N. (1985). An introduction to the finite element method, McGraw-Hill, International editions.
- Reddy, J. N. (2007). Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams. *International Journal of Engineering Science*, 45, 288-307.
- Reddy, J. N. (2010). Nonlocal nonlinear formulations for bending of classical and shear deformation theories of beams and plates. *Int. J. Eng. Sci.* 48, 1507-1518.
- Reddy, J. N., El-Borgi, S. (2014). Eringen's nonlocal theories of beams accounting for moderate rotations. *International Journal of Engineering Science*, 82, 159-177.
- Sciarra, F. M. (2014). Finite element modelling of nonlocal beams. *Physica E*, 59, 144-149.
- Thai, H-T. (2012). A nonlocal beam theory for bending, buckling, and vibration of nanobeams. *International Journal of Engineering Science*, 52, 56-64.
- Thai, H-T., Vo, T. P. (2012). A nonlocal sinusoidal shear deformation beam theory with application to bending, buckling, and vibration of nanobeams. *Int. J. Eng. Sci.* 54, 58-66.
- Thai, S., Thai, H-T., Vo, T. P. (2018). Patel V. I., A simple shear deformation theory for nonlocal beams. *Composite Structures*, 183, 262-270.
- Togun, N., Bagdatli, S. M. (2016). Nonlinear vibration of a nanobeam on a Pasternak elastic foundation based on nonlocal EulerBernoulli beam theory. *Mathematical and Computational Applications*, 21(3), 1-19.
- Togun, N., Bağdatlı, S. M. (2016). Size dependent nonlinear vibration of the tensioned nanobeam based on the modified couple stress theory. *Composites Part B: Engineering*, 97, 255-262.
- Togun, N. (2014). Linear vibration analysis of nanobeam carrying nanoparticle based on nonlocal elasticity theory. 2. *International Conference on Advances in Mechanical and Robotics Engineering*, Zürich, Switzerland, 25-26 October.
- Togun, N. (2016). Nonlocal beam theory for nonlinear vibrations of a nanobeam resting on elastic foundation. *Boundary Value Problems*, 57, 1-14.
- Toksöz, A. (2010). Yerel olmayan elastisite teorisinde açılı ve ritz yöntemlerinin nanoteknolojiye uygulanması. Doktora tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Verma, A. K., Day S. S. (1991). Integrated analysis of curved bridge superstructures by variational finite difference method. *Comput. Struct.* 38(55), 597-603.
- Wang, C. M., Kitipornchai, S., Lim, C. W. (2008). Eisenberger, Beam bending solutions based on nonlocal Timoshenko beam theory. 10.1061/(ASCE) 0733-9399, 134:6(475)
- Wang, Q., Liew, K. M. (2007). Application of nonlocal continuum mechanics to static analysis of micro-and nano-structures. *Phys. Lett. A* 363, 236-242.

- Xu, M. (2006). Free transverse vibrations of nano-to-micron scale beams. *Proc. Roy. Soc. A* 462, 2977-2995.
- Xu, X-J., Wang, X-C., Zheng, M-L., Zheng, M. (2017). *Composite Structures*, 160, 366-377.
- Zienkiewicz, O. C. (1977). *The finite elements*, Mc Graw-Hill, London.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Miyase Gökçe BALIKÇILAR

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi : 2017, Konya Selçuk Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği

Yüksek Lisans Öğrenimi : 2021, KTO Karatay Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği

Bildiği Yabancı Diller : İngilizce

İŞ DENEYİMİ

Stajlar :Küpedağ Mimarlık Mühendislik İnş. Taah. Ve Tic. Ltd. Şti

Binko Yapı Gayrimenkul LTD. ŞTİ – NSG Yapı

Projeler : 2018, İnşaat mühendisi, Kovanağzı konut projesi

Çalıştığı Kurumlar : 2018, İnşaat müh., Delta Group Mühendislik Mimarlık

Tarih: 27 Ağustos 2021