Eğitim ve İnsani Bilimler Dergisi: Teori ve Uygulama
Journal of Education and Humanities: Theory and Practice
Cilt (Vol): 5 Sayı (No): 10 Güz (Fall) 2014, 59-72

Matematik Öğretmen Adaylarının Lineer Kongrüanslara İlişkin Soyutlamayı İndirgeme Eğilimleri

Ş. CAN ŞENAY
KTO Karatay Üniversitesi

AHMET Ş. ÖZDEMİR
Marmara Üniversitesi

Gönderim Tarihi:16.07.2014
Kabul Tarihi:11.10.2014

Öz: Matematik öğretmen adaylarının lisans eğitimi süresince alan bilgilerinin şekillenmesinde önemli rolü olan derslerden birisi de Sayılar Teorisi dersidir. Bu çalışmada, matematik öğretmen adaylarının, Sayılar Teorisi dersi kapsamında verilen lineer kongrüanslar ile ilgili algılayışları, Hazzan'ın (1999) geliştirdiği *soyutlamanın indirgenmesi* teorisi çerçevesinde incelenmiştir. *Soyutlamanın indirgenmesi* düşüncesi öğrencilerin, kavramların derste verildiği soyutlama seviyesinden daha düşük seviyedeki bir soyutlamayla çalışma eğilimlerine dayanmaktadır. Araştırmamızda, ilköğretim ve ortaöğretim matematik eğitimi bölümlerinde okuyan öğretmen adaylarından oluşan bir çalışma grubuna sorulan üç tane lineer kongrüans denkleminin çözümüne yönelik yazılı cevaplar, betimsel analiz ve içerik analizi yöntemleri ile incelenmiştir. Elde edilen bulgulardan, öğretmen adaylarının birçoğunun, denklemlerin çözümünün varlığı için gerekli şartları belirten teoremleri kullanmadan veya yanlış kullanarak çözüme ulaşmaya çalıştıkları görülmüştür. Bu durum, soyutlama seviyesinin indirgendiğinin bir göstergesidir.

Anahtar Kelimeler: Soyutlamanın indirgenmesi, lineer kongrüanslar.

Pre-Service Mathematics Teachers' Tendencies of Reducing Abstraction about Linear Congruence

Abstract: Number theory is one of the courses that play an important role in forming the content knowledge of the pre-service mathematics teachers during their undergraduate education. In this research, the conception of the pre-service mathematics teachers about linear congruence which is given in the number theory course is examined through the framework of the theory of *reducing abstraction*. The theme of *reducing abstraction* is based on students' tendencies to work on a lower level of abstraction than the one in which concepts are introduced in class. The answers of a study group to the questions related with linear congruence are analyzed with the methods of content and descriptive analysis. From the obtained findings, it was observed that many of the pre-service teachers try to solve the equations without using the theorems about the existence of the solutions of a linear congruence or they misused them. This situation is an indication that the level of abstraction is reduced.

Key words: Reducing abstraction, linear congruence.

Atıf için/cite as:
Şenay, Ş. C., & Özdemir, A. Ş. (2014). Matematik Öğretmen Adaylarının Lineer Kongrüanslar ile İlgili Soyutlamayı İndirgeme Eğilimleri. *Eğitim ve İnsani Bilimler Dergisi: Teori ve Uygulama [Journal of Education and Humanities: Theory and Practice]*, 5(10), 59-72.

Bireylerin matematik öğrenimini etkileyen en önemli faktörlerden birisi de öğretmenlerdir. Öğretmenlerin bilgi ve yeterlikleri, matematik eğitiminin kalitesiyle doğrudan alakalıdır. Shulman'ın (1987) bir öğretmenin sahip olması gereken bilgi ve yeterlikler kapsamında tanımladığı alan bilgisi, öğretmenin alanındaki kavram ve olgular bilgisi ve alanın yapısı hakkındaki bilgisini kapsar.

Sayılar teorisi dersi lisans eğitimi süresince matematik öğretmen adaylarının alan bilgilerini şekillendiren en önemli derslerdendir. Ortaokul ve ortaöğretim matematik öğretim programlarındaki (MEB, 2013) sayılarla ilgili kazanımlar dikkate alındığında, öğretmen adaylarının bu dersin kapsamındaki kavram ve teoremleri algılayışlarının, matematiği doğru olarak anlayabilme ve anlatabilmelerini de etkileyeceği görülecektir.

Öğretmenlerin alan bilgisindeki önemine rağmen sayılar teorisine yakın zamana kadar matematik eğitimi araştırmalarında kısıtlı yer verilmiştir. Bu çalışmaların bir kısmında da elementer sayılar teorisi kavramları, sadece farklı sorunların araştırılmasında kullanılan matematiksel bir içerik olarak görülmektedir (Zaskis ve Campbell, 2011). Sayılar teorisi kavramlarına yönelik çalışmalardan bazılarını burada vereceğiz: Bolte (1999), öğretmen adaylarının matematiksel bilgiyi bütünleştirme ve ifade etmelerini incelediği araştırmasında katılımcılardan, kavram haritalarını kullanarak, asal çarpan, bölen, bölünebilme gibi sayılar teorisiyle ilgili 20 terimi ilişkilendirmelerini istemiş ve sadece bir katılımcının, terimlerin ilişkisindeki derinliği gösteren bir kavram haritası oluşturabildiğini belirtmiştir. Brown, Thomas ve Tolias (2002), sınıf öğretmeni adaylarının, çarpımsal yapılarla ilgili algılarını bölünebilmeyle ilgili problemlere nasıl aktardıklarını incelemek amacıyla 10 gönüllü öğretmen adayıyla mülakat yapmışlar ve mülakatları *APOS* teorisi çerçevesinde nitel olarak analiz etmişlerdir. Katılımcılara, bölünebilme, standart (asalların çarpımı) formundaki bir sayının bölünebilmesi ve ekok kavramlarını içeren açık uçlu sorular sorulmuştur. Elde edilen bulgulardan, öğretmen adaylarının bölünebilme ile ilgili algılarının, çarpımsal yapılarla ilgili algılarından etkilendiğini tespit etmişlerdir. Bundan dolayı, pedagojik olarak çarpma kavramına daha fazla önem verilerek bölme işleminin, çarpmanın ters işlemi şeklinde öğretilmesinin daha faydalı olacağını vurgulamışlardır. Ayrıca standart formdaki bir sayıyı asal çarpanlarına bölerek veya başka asallarla çarparak yeni standart formların elde edilmesi veya çarpma işleminin değişme ve birleşme özelliklerinden yararlanarak yeni bileşik sayıların elde edilmesi yöntemiyle öğrenmenin daha etkili olacağını belirtmişlerdir. Smith (2002), altı kişilik bir çalışma grubu ile lisans öğrencilerinin kongrüanslar ile ilgili anlayışlarını incelemiş ve bu öğrencilerin ileri matematiksel düşünceyi kullanma derecelerini analiz etmek için bir sistem geliştirmiştir. Smith çalışmasında, öğrencilerin kongrüanslar ile ilgili algılayışlarına yönelik dört ana bulguya ulaşmıştır: Öğrenciler, genellikle, 1) kongrüans ile ilgili sözde bir tanımı kullanmışlardır, 2) "mod world (modüler aritmetik dünyası)" olarak adlandırdıkları alanda çalışmaktan kaçınmışlardır, 3) kongrüansların daha çok işlemsel yönüne ağırlık vermişlerdir, 4) kongrüansları, sıradan denklemlerin benzeri olarak görmemişlerdir. Bununla birlikte öğrenciler, sınıfta öğretilen metot yerine başka metotları kullanmışlardır. Papadopoulos ve Iatridou (2010), öğrencilerin problem çözerken kullandıkları matematiksel modellemeleri incelemek için iki, 10. Sınıf öğrencisine, dikdörtgenin alanı ile ilgili geometrik bir problem sormuşlar ve problemi, Diophantine denklemleri kullanarak modelleyebilmelerini beklemişlerdir. Sonuç olarak öğrencilerin problemi modellerken uygun denklemleri kullanmalarına rağmen denklemleri çözerken önceki alışkanlıklarından etkilenerek deneme-yanılma metodu gibi yolları kullandıklarını görmüşlerdir. Kurz ve Garcia (2012) ise geliştirdikleri materyalin öğretmen adaylarına, asal çarpanlara ayırma, ebob ve ekok'un bulunması, tam kare ve tam küp sayılar gibi kavramların öğretilmesi ile ilgili uygulamalarını, uygulamada karşılaştıkları güçlükleri ve uygulamanın öğretmen adayları üzerindeki etkisini inceledikleri bir çalışma yapmışlardır. Uygulama esnasında bazı katılımcıların materyali kullanmaya karşı isteksiz oldukları ve materyalin kullanılmasında ilk başta zorlandıkları görülmüştür. Bununla birlikte katılımcılar, materyalin, önceden bildikleri asal çarpanlara ayırma metoduna (ağaç metodu) göre daha işlevsel olduğunun farkına varmışlardır.

Lineer Kongrüanslar

Lineer kongrüanslar, matematik öğretmen adaylarının, Sayılar Teorisi dersi kapsamında gördükleri ve ortaöğretim matematik programında (MEB, 2013) 11. sınıflara modüler aritmetik ünitesinde bazı özelliklerinin verildiği, günlük hayatta da birçok uygulaması (saat, nöbet, yerleşim problemleri vb.) olan önemli bir kavramdır. Aşağıda lineer kongrüansın tanımı ve çözümü ile ilgili temel teoremler verilecektir.

Tanım. $a, b, m \in Z$ ve $m \neq 0$, $a \not\equiv 0 \pmod{m}$ olmak üzere $ax \equiv b \pmod{m}$ şeklindeki bir denkleme *bir bilinmeyenli lineer kongrüans* denir (Şenay, 2007, s. 141).

Teorem 1. Eğer $(a, m) = 1$ ise $ax \equiv b \pmod{m}$ denkleminin $x = x_0$ olan bir tek çözümü vardır. Diğer bütün kongrüent çözümler $t = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$ olmak üzere $x = x_0 + tm$ ile verilir. Yani $x \equiv x_0 \pmod{m}$ dir (Şenay, 2007, s.142).

Teorem 2. $ax \equiv b \pmod{m}$ kongrüansının bir çözümünün bulunması için gerek ve yeter koşul $(a, m) \mid b$ olmasıdır (Şenay, 2007, s.143).

Teorem 3. $(a, m) = d$ ve $d \mid b$ ise $ax \equiv b \pmod{m}$ lineer kongrüansının tam *d* tane çözümü vardır. Bu çözümler, $0 \leq t \leq d-1$ için ve x_0 bir çözüm olmak üzere $x \equiv x_0 + t\dfrac{m}{d} \pmod{m}$ ile verilir (Şenay, 2007, s.143).

Soyutlamanın İndirgenmesi

Soyutlama seviyesinin indirgenmesi (kısaca, *soyutlamanın indirgenmesi*) teorisi, ilk olarak Hazzan (1999) tarafından, lisans öğrencilerinin soyut cebir kavramlarını algılayışlarını açıklamak için geliştirilerek kullanılmış ve genellikle de ileri matematiksel düşünceyle ilgili alanlar (bilgisayar bilimleri gibi) ve lisans matematiğindeki konularla ilişkilendirilmiş (Hazzan, 2001, 2003a, 2003b) bir teoridir. Hazzan ve Zaskis (2005) ise bu teorinin okul (ortaokul ve lise) matematiği seviyesinde de kullanılabileceğini göstermişlerdir.

Soyutlama seviyesinin indirgenmesi düşüncesi esasen öğrencilerin, derste karşılaştıkları kavramlardaki soyutlamadan veya uzmanların (matematikçiler, öğretmenler vb.) kendilerinden beklediğinden daha düşük seviyedeki bir soyutlamayla çalışma eğilimlerine dayandırılabilir. "Soyutlamanın indirgenmesi" terimi mutlaka yanılgıyla veya matematiksel hatayla sonuçlanan bir zihinsel süreç olarak anlaşılmamalıdır. Soyutlama seviyesini indirgeme süreci, öğrencinin öğrendiği yeni kavramlarla baş edebilmek için yollar bulmasının göstergesidir. Öğrenciler bu şekilde, kavramları zihinsel olarak erişilebilir hale getirir böylece onlarla düşünebilir ve bilişsel olarak ele alabilirler. Soyutlamanın indirgenmesi teorisi, literatürdeki *soyutlama seviyeleri* ile ilgili üç farklı yorumdan hareketle oluşturulmuştur. Bununla birlikte, soyutlama seviyelerinin bu farklı yorumlarının birbirlerini karşılıklı olarak ne tamamen dışladıklarını ne de tamamen kapsadıklarını da ayrıca belirtmeliyiz (Hazzan, 1999, 2001). Aşağıda, soyutlama seviyelerinin bu üç farklı yorumu ile ilgili bilgi verilecektir.

a) Düşünülen nesne ve düşünen insan arasındaki ilişkinin kalitesi bakımından soyutlama seviyesi

Soyutlama seviyesi ile ilgili bu yorum, Wilensky' nin (1991), "herhangi bir şeyin soyut ya da somut olması, o şeyin doğal bir özelliği değildir aksine kişi ile nesne arasındaki ilişkinin özelliğinden kaynaklanır" iddiasına dayanır. Başka bir deyişle, her kavram ve her kişi için ikisi arasındaki önceki ilişkiyi yansıtan farklı bir seviyedeki soyutlamayı gözleyebiliriz. Bir kişi bir nesneye ne kadar yakın olursa ve ne kadar çok bağ kurmuşsa bu nesneyi o kadar daha somut (ve daha az soyut) hisseder. Bu bakış açısının temelinde, bazı öğrencilerin zihinsel süreçlerindeki, tanıdık olmayan bir düşünceyi daha tanıdık yapma veya soyutu somut yapma eğilimleri yatmaktadır (Hazzan, 1999).

b) Süreç-nesne ikililiğinin (process-object duality) yansıması bakımından soyutlama seviyesi

Soyutlama seviyesi ile ilgili bu yorum, matematik eğitiminde kavram geliştirme teorilerinde önerilen süreç-nesne ikililiğine dayanır. Örneğin, bu teorilerden *APOS* (Eylem-Süreç-Nesne-Şema) teorisine göre anlamanın gelişmesi, önceden yapılandırılan zihinsel veya fiziksel nesnelerin eylem oluşturmak için manipüle edilmesiyle başlar; eylemler daha sonra süreçleri oluşturmak için içselleştirilir ve süreçler de nesneleri oluşturmak için birlikte düşünülür (Meel, 2003). Süreç-nesne ikililiğe dayanan bu teoriler, matematiksel düşüncelerin, süreç olarak kavranışı ile nesne olarak kavranışını birbirinden ayırırlar ve farklılıklarına rağmen matematiksel bir kavram öğrenildiğinde, onun bir süreç (ardışık işlemler) olarak kavranmasının nesne olarak kavranmasından önce ve daha az soyut olduğu üzerinde birleşirler. Bundan dolayı matematiksel bir kavramın süreç olarak kavranışı bir nesne olarak kavranışından daha düşük bir seviyede soyutlama (yani *soyutlamanın indirgenmesi*) olarak yorumlanabilir (Hazzan, 1999).

c) Düşünülen matematiksel kavramın karmaşıklığının derecesi bakımından soyutlama seviyesi

Soyutlama seviyesinin bu yorumunu bir örnekle açıklamak gerekirse; elemanların bir kümesi, kümedeki herhangi bir özel elemandan daha karmaşık bir matematiksel yapıdır. Bu gerçek tabi ki de karmaşık nesnelerle düşünmenin daha zor olacağını gerektirmez. Buradaki varsayımımız, bir yapı ne kadar karmaşıksa o kadar da soyuttur çünkü bir yapı bütün olarak analiz edildiğinde daha fazla detay göz ardı edilmelidir. Bu bakımdan soyutlamanın bu yorumu, öğrencilerin, bir kümenin yerine onun bir elemanını koyarak dolayısıyla da daha az karmaşık bir nesneyle çalışarak soyutlama seviyesini nasıl indirgediklerine odaklanmaktadır.

Sayılar teorisi formel ve bilişsel doğası, aritmetik ve cebirle ilişkisi, kriptoloji ve bilgisayar bilimleri gibi birçok uygulama alanı ile matematik eğitiminde üzerinde özellikle durulması gereken bir alandır. Sayılar teorisinin bu önemine rağmen matematik eğitimi araştırmalarında yeteri kadar yer almaması ve s*oyutlamanın indirgenmesi* teorisinin de sayılar teorisi alanında kullanılmamış olması araştırmamıza yön vermiştir.

Araştırmamızın amacı, öğretmen adaylarının Sayılar Teorisi dersinde gördükleri *lineer* kongrüanslar ile ilgili soyutlamayı indirgeme eğilimlerini belirlemektir. Bu amaç doğrultusunda araştırmamızın problem cümlesi: "Matematik öğretmen adaylarının lineer kongrüanslar ile ilgili soyutlamayı indirgeme eğilimleri nelerdir?" şeklinde belirlenmiştir.

Yöntem

Araştırma problemlerinin anlaşılmasında nicel ve nitel yaklaşımların birlikte kullanılması, her iki yaklaşımın tek başına kullanılmasına göre daha yararlıdır. Bu çalışmada hem nitel hem de nicel yöntemler birlikte kullanılmıştır. Bir çalışma içerisinde nitel ve nicel yöntem, yaklaşım ve kavramların birleştirilmesi karma yöntem araştırması olarak tanımlanır (Creswell, 2003). Baki ve Gökçek (2012) ise, karma yöntemle araştırma yapmanın, çeşitli yöntemler kullanarak olayları bir çerçeve içerisinde sunma, analiz etme ve bir araya getirme olduğunu belirtmektedir. Bu açıklamalar ışığında çalışmamızın bir karma yöntem araştırması olduğunu söyleyebiliriz.

Bu araştırma, 2012-2013 güz döneminde, N. E. Ü. A. K. Eğitim Fakültesinin İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü 4. sınıf ve Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü 3., 4. ve 5. sınıftaki öğretmen adayları üzerinde yürütülmüştür. Araştırmamızda, matematik öğretmen adaylarının soyutlamayı indirgeme eğilimleri, Sayılar Teorisi dersinin kapsamındaki lineer kongrüanslar üzerinden inceleneceği için uygulamamıza, Sayılar Teorisi dersini almış veya almakta olan öğretmen adayları katılmıştır. Buna göre, Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü 4. ve 5. sınıftaki öğretmen adayları, Sayılar Teorisi dersini daha önceden aldıkları, diğerleri de lineer kongrüanslar konusunu uygulamadan önce ders kapsamında gördükleri için tercih edilmiştir.

Sayılar teorisi dersini, farklı üniversite ve bölümlerde uzun yıllar boyunca veren uzmanların görüşleri de alınarak, giriş bölümünde verdiğimiz teoremler doğrultusunda katılımcılardan, aşağıda verilen lineer kongrüans denklemlerinin çözümlerini bulmaları istenmiştir:

1) $3x \equiv 2 \pmod{8}$

2) $6x \equiv 5 \pmod{9}$

3) $4x \equiv 6 \pmod{10}$

Kapsam geçerliliğinin sağlanması için bu denklemlerin, bir lineer kongrüans denkleminin çözümüne ilişkin tüm durumları içermesine ayrıca dikkat edilmiştir. Buna göre, denklemlerden 1. sinin tek çözümü, 3. sünün birden fazla kongrüent olmayan çözümü var; 2. denklemin ise çözümü yoktur.

Öğretmen adaylarının yazılı cevapları *soyutlamanın indirgenmesi* teorik çerçevesine göre betimsel analiz ve içerik analizi yöntemleri ile incelenmiştir. Bununla birlikte, verilen cevaplar Tablo 1. de açıklandığı şekilde sınıflandırılarak frekans ve yüzdelik dağılımları hesaplanmıştır.

Tablo 1.
Verilen Cevapların Soyutlamayı İndirgeme Teorisine Göre Sınıflandırılması

Örnek çözüm	Sınıflandırma
a) $3x \equiv 2 \pmod 8$ (3,8)=1 olduğundan bir tek çözüm vardır. 3/ $3x \equiv 2 \pmod 8$ $\boxed{x \equiv 6 \pmod 8}$ b) $6x \equiv 5 \pmod 9$ → (6,9)=3 olduğundan ve 3∤5 olduğundan çözüm yok. c) $4x \equiv 6 \pmod{10}$ → (4,10)=2 2|6 old. göre 2 tane çözümü var. 2/ $2x \equiv 3 \pmod 5$ $x \equiv 4 \pmod 5$ → $x \equiv (5t+4) \pmod{10}$ $t \in \mathbb{Z}$ t=0 için → $x \equiv 4 \pmod{10}$ t=1 için → $x \equiv 9 \pmod{10}$	Bu çalışmada, lineer kongrüanslar ile ilgili teorem ve özelliklerin tam ve doğru olarak kullanılması beklenen yöntem olarak kabul edilmiştir; bundan dolayı yandaki sütunda verilen çözüm **beklenen yöntem** kategorisine alınmıştır.
a) $3x \equiv 2 \pmod 8$ $3.3.x \equiv 3.2 \pmod 8$ $x \equiv 6 \pmod 8$ b) $6x \equiv 5 \pmod 9$ $3.6.x \equiv 5.3 \pmod 9$ $0.x \equiv 6 \pmod 9$ çözüm yok c) $4x \equiv 6 \pmod{10}$ $x \equiv 4$ $x \equiv 9$	Yandaki sütunda verilen örnekte öğretmen adayı, kabul edilen beklenen yöntemi kullanmak yerine daha önceden alışık olduğu veya kendisine daha tanıdık gelen bir yolu kullanarak soyutlama seviyesini indirgemiş ve bu şekilde doğru cevaba ulaştığı için de bu çözüm **indirgeme doğru cevap** kategorisine alınmıştır.
$3x \equiv 2 \pmod 8$ $3.3x \equiv 2.3 \pmod 8$ $x \equiv 6 \pmod 8$ ⇒ $x = 8k+6$. $k \in \mathbb{Z}$. $6x \equiv 5 \pmod 9$ (6 ve 9 aralarında asal olmadığı için ((6,9) ≠ 1) çözüm yoktur). $4x \equiv 6 \pmod{10}$ (4,10) ≠ 1 olduğundan çözüm yoktur.	Yandaki sütunda verilen örnekte öğretmen adayı, kabul edilen beklenen yöntem yerine kendisine daha tanıdık gelen bir yolu kullanarak soyutlama seviyesini indirgemiş fakat doğru cevaba ulaşamadığından dolayı bu çözüm **indirgeme yanlış / kısmen doğru cevap** kategorisine alınmıştır.

Bulgular

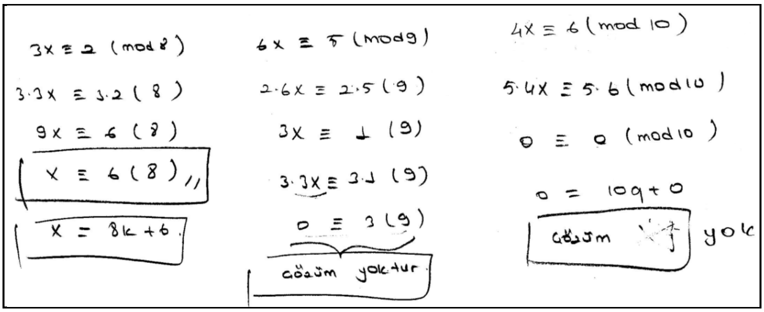
Matematik öğretmen adaylarının yazılı cevaplarının soyutlamanın indirgenmesi teorisine göre yapılan sınıflandırılması sonucunda elde edilen frekans ve yüzdelikler Tablo 2. de verilmiştir.

Tablo 2.
Öğretmen Adaylarının Cevaplarının Sınıflandırılmasına İlişkin Frekans ve Yüzde Dağılımları

f/%	Boş	İndirgeme doğru cevap	İndirgeme yanlış/kısmen doğru cevap	Beklenen yöntem
f	12	6	100	18
%	8.8	4.4	73.5	13.2

Tablo 2. incelendiğinde sadece 18 (% 13.2) öğretmen adayının, verilen denklemlerin çözümünde Sayılar Teorisi dersinde gördükleri yöntem ve teoremleri tam ve doğru bir şekilde kullandıkları görülmektedir. 106 (% 77.9) öğretmen adayı ise soyutlama seviyesini indirgeyerek denklemleri çözmeye çalışmış, bunlardan da sadece 6'sı (% 4.4) doğru çözümlere ulaşmıştır.

Öğretmen adaylarından 70'inin (% 51.5), Teorem 2. de belirtilen, "$ax \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$ kongrüans denkleminin çözümünün olabilmesi için $(a,m)|b$ olmalıdır" şartını kontrol etmeden işlemlere geçerek denklemleri çözmeye çalıştıkları görülmüştür. Şekil 1. de bir öğretmen adayının çözümü verilmiştir.

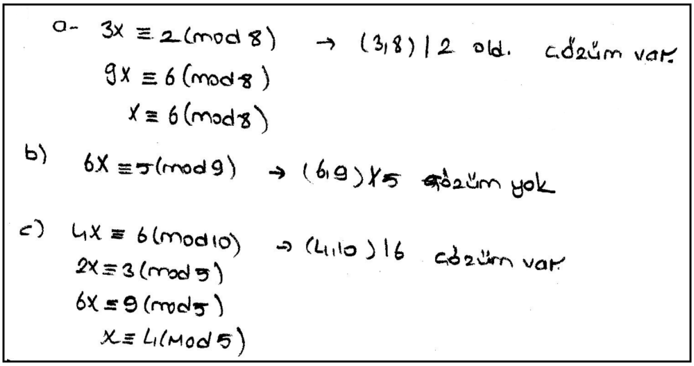


Şekil 1. Bir Öğretmen Adayının Soruyu Çözümü

Şekil 1. deki ve benzer yaklaşımı gösteren öğretmen adaylarının, özellikle $6x \equiv 5 \text{ (mod 9)}$ denkleminin, $(6,9)=3$ ve $3 \nmid 5$ olduğundan, Teorem 2. ye göre çözümünün olmamasına rağmen denklemi çözmeye çalıştıkları görülmüştür. Bu öğretmen adaylarının bir lineer kongrüans denkleminin çözümünün varlığıyla ilgili olan Teorem

2. yi içselleştiremedikleri görülmektedir. Bu öğretmen adaylarının, matematiksel bir yapı olan teoremi *nesne* olarak kavrayamadıklarını yani denklemlerin çözümlerinin varlığının analizinde kullanamadıklarını ve sadece karşılaştıkları soruyla tetiklenen işlemlere (*süreç*) yöneldiklerini böylece de *süreç-nesne ikililiğinin yansıması bakımından* soyutlama seviyesini indirgediklerini söyleyebiliriz.

Öğretmen adaylarından 79'u (% 58.1), Teorem 3. de belirtilen, "$(a,m)=d$ ve $d|b$ ise $ax\equiv b(\mathrm{mod}\,m)$ lineer kongrüansının tam d tane çözümü vardır" önermesini dikkate almadan verilen denklemlerin çözümüne ulaşmaya çalışmışlardır. Şekil 2. de bir öğretmen adayının bu yaklaşımı örnek olarak verilmiştir.



Şekil 2. Bir Öğretmen Adayının Soruyu Çözümü

Şekil 2. deki ve benzer çözümleri yapan öğretmen adayları, $4x\equiv 6$ (mod 10) denkleminin, $(4,6)=2$ ve $2|6$ olduğundan, Teorem 3. e göre $x\equiv 4$ (mod 10) ve $x\equiv 9$ (mod 10) olmak üzere iki tane gerçek çözümünün olduğunu göz ardı etmişlerdir. Bu öğretmen adaylarının, bir lineer kongrüans denkleminin çözümleri ile ilgili olan bir teoremi, *nesne* olarak kavrayamadıklarını yani denklemin çözüm sürecinin analizinde kullanamadıklarını ve sadece karşılaştıkları soruyla tetiklenen işlemlere (*süreç*) yöneldiklerini böylece de *süreç-nesne ikililiğinin yansıması bakımından* soyutlama seviyesini indirgediklerini söyleyebiliriz.

Öğretmen adaylarından 21'i (% 15.4) de "$(a,m)\neq 1$ ise denklemin çözümü yoktur" şeklindeki bir yaklaşımla $4x\equiv 6$ (mod 10) denkleminin çözümünün olmadığını belirtmişlerdir. Şekil 3. de bir öğretmen adayının bu yöntemle yaptığı çözüm örnek olarak verilmiştir.

$3x \equiv 2 \pmod 8$

$3.3x \equiv 2.3 \pmod 8$

$x \equiv 6 \pmod 8 \Rightarrow x = 8k+6. \quad k \in \mathbb{Z}.$

$6x \equiv 5 \pmod 9$

(6 ve 9 aralarında asal olmadığı için $((6,9) \neq 1)$ çözüm yoktur).

$4x \equiv 6 \pmod{10}$ $\quad (4,10) \neq 1$ olduğundan çözüm yoktur.

Şekil 3. Bir Öğretmen Adayının Soruyu Çözümü

Şekil 3. deki ve benzer çözümleri yapan öğretmen adayları, Teorem 1. deki "$(a,m)=1$ ise $ax \equiv b(\bmod m)$ denkleminin bir tek çözümü vardır" önermesini "$(a,m) \neq 1$ ise denklemin çözümü yoktur" şeklinde genellemişlerdir. Bu öğretmen adayları, $p \Rightarrow q$ şeklindeki bir önerme ile $\sim p \Rightarrow \sim q$ önermesinin her zaman aynı doğruluk değerine sahip olduklarını düşünerek kendilerinden beklenen seviyeden daha düşük bir seviyede soyutlama eğilimi göstermiş ve soyutlama seviyesini, *düşünülen nesne ve düşünen insan arasındaki ilişkinin kalitesi bakımından* indirgemişlerdir.

Öğretmen adaylarından 21'i (% 15.4), $ax \equiv b(\bmod m)$ kongrüans denkleminin çözümünün olması için Teorem 2. de belirtilen "$(a,m)|b$ olmalıdır" şartı yerine Teorem 1. deki $(a,m)=1$ şartını kontrol ederek denklemleri çözmüşlerdir. Şekil 4. de bir öğretmen adayının bu yöntemle yaptığı çözüm örnek olarak verilmiştir.

a) $3x \equiv 2 \pmod 8$ ebob$(3,8)=1$ olduğundan çözüm var.

$3x-2 = 8k$ buradan $x = 6$

b) $6x \equiv 5 \pmod 9$

ebob$(6,9)=3$ olduğundan çözüm yoktur.

c) $4x \equiv 6 \pmod{10}$ $\quad 2x \equiv 3 \pmod 5$ ebob$(2,5)=1$ olduğundan çözüm var.

$4x-6 = 10k$ buradan $x=4$

$2x-3 = 5k$

Şekil 4. Bir Öğretmen Adayının Soruyu Çözümü

Şekil 4. deki ve benzer çözümleri yapan öğretmen adayları, sadece $(a,m)=1$ şartını kontrol ettiklerinden dolayı $4x \equiv 6 \ (\bmod 10)$ denkleminin, $(4,6)=2$ ve $2|6$ olduğundan, Teorem 3. e göre

$x \equiv 4 \pmod{10}$ ve $x \equiv 9 \pmod{10}$ olmak üzere iki tane gerçek (kongrüent olmayan) çözümünün olduğunu fark edememişlerdir. Bu öğretmen adaylarının, bir lineer kongrüans denkleminin çözümleri ile ilgili olan teoremleri, *nesne* olarak kavrayamadıklarını yani denklemin çözüm sürecinin analizinde doğru olarak kullanmadan çözüme (*süreç*) yöneldiklerini böylece de *süreç-nesne ikililiğinin yansıması bakımından* soyutlama seviyesini indirgediklerini söyleyebiliriz. Bununla birlikte, kendilerine $(a,m)|b$ nesnesinden daha az karmaşık gelen $(a,m)=1$ nesnesi ile çalışma eğilimi gösteren öğretmen adaylarının soyutlama seviyesini *düşünülen kavramın karmaşıklığının derecesi bakımından* indirgediklerini de söyleyebiliriz.

Tartışma ve Sonuç

Matematik öğretmen adaylarının lineer kongrüanslar ile ilgili soyutlamayı indirgeme eğilimlerini incelediğimiz bu çalışmada, öğretmen adaylarının yaklaşımları ve konu ile ilgili matematiksel kavram ve teoremleri nasıl algıladıkları yani soyutlamayı hangi seviyede indirgedikleri örneklerle gösterilmiştir. Böylece, Hazzan'ın (1999, 2001) da belirttiği gibi teorik çerçeve olarak *soyutlamanın indirgenmesi* teorisinin, öğrencilerin matematiksel yapıları ve kavramları algılayışlarını açıklama ve yorumlamada kuvvetli bir araç olduğu bir kere daha görülmüştür.

Çalışmamızda, Smith'in (2002) bulgularına benzer olarak, öğretmen adaylarının çoğunun kongrüansların daha çok işlemsel yönüne ağırlık verdikleri, Sayılar Teorisi dersinde gördükleri lineer kongrüans denkleminin çözümünün varlığıyla ilgili teoremleri göz ardı ettikleri gözlenmiştir. Soyutlamanın indirgenmesi açısından baktığımızda ise öğretmen adayları, daha üst seviyede bir soyutlama olarak nitelendirebileceğimiz, kavram ve teoremlerin analizini yapmadan daha alt seviyede bir soyutlama olan işlemlere (*süreç*) yönelerek soyutlama seviyesini indirgemişlerdir. Öğretmen adaylarının bu eğilimleri, teoremlerin matematiksel bir *nesne* olarak kavranamadığının ve içselleştirilemediğinin bir göstergesidir.

Sayılar Teorisi gibi teorik derslerin içerdiği kavramların soyutluk seviyeleri, bu derslerin işleniş şekli ve öğrencilerin bu kavramları içselleştirmelerini sağlayacak etkinliklerin düzenlenmesi için yeterli zamanın olmayışı, öğrencilerin karşılaştıkları yeni matematiksel yapıları önceki bilgileriyle birlikte özümsemelerini engellemektedir. Bu bakımdan, derslerde çözülen soruların öğrencilerin kavram ve teoremleri algılayışları dikkate alınarak düzenlenmesi, örneğin, çözümü olmayan bir denklemin bir problem şeklinde öğrencilere sorulması veya karşıt örneklerin sıkça kullanılması yanlış algılamaları önlemede faydalı olacaktır. Bununla birlikte, lisans derslerinde öğretilen kavram ve teoremlerin ortaokul ve lise matematik programlarındaki kazanımlarla ilişkilendirilerek verilmesi öğretmen adaylarının öğrenme motivasyonunu artırıcı bir yaklaşım olacaktır.

Soyutlamanın indirgenmesi teorisi Hazzan'a (1999) göre öğrenci hata ve yanılgılarını incelemek için geliştirilmiş bir teori olmasa da ilgili çalışmalardaki ve çalışmamızdaki örneklerde, öğrencilerin soyutlamayı indirgeme eğilimlerinin hata veya yanılgılarla sonuçlanabileceği, dolayısıyla bu teorik çerçevenin, öğrenci hata ve yanılgılarının incelenmesinde de kullanılabileceği görülmüştür. Bu bakımdan benzer çalışmalar farklı seviyelerde ve farklı alanlarda yapılarak, muhtemel öğrenci yanılgı ve hataları da tespit edilebilir. Sonraki çalışmalarda teorik çerçeve olarak *soyutlamanın indirgenmesi* teorisinin, sayılar teorisinin diğer kavramları ile ilgili öğrenci yaklaşımlarının incelenmesinde kullanılması da, bu çalışmanın bulgu ve sonuçlarının daha iyi değerlendirilmesine katkı sağlayacaktır.

Kaynaklar/References

Baki, A. ve Gökçek, T. (2012). Karma yöntem araştırmalarına genel bir bakış. *Elektronik Sosyal Bilimler Dergisi*, 11(42), 1-21.

Bolte, L. (1999). Enhancing and assessing preservice teachers' integration and expression of mathematical knowledge. *Journal of Mathematics Teacher Education, 2*(2), 167-185.

Brown, A., Thomas, K., and Tolias, G. (2002). Conceptions of divisibility: Success and understanding. In S. R. Campbell & R. Zazkis (Eds.), *Learning and Teaching Number Theory: Research in Cognition and Instruction,* 41-82. Westport, CT: Ablex.

Creswell, J. W. (2003). *Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches* (2nd ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.

Hazzan, O. (1999). Reducing abstraction level when learning abstract algebra concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 40, 71–90.

Hazzan, O. (2001). Reducing abstraction: The case of constructing an operation table for a group. *Journal of Mathematical Behaviour,* 20(2), 163-172.

Hazzan, O. (2003a). How students attempt to reduce abstraction in the learning of mathematics and in the learning of computer science. *Computer Science Education,* 13(2), 95-122.

Hazzan, O. (2003b). Reducing abstraction when learning computability theory. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching,* 22(2), 95-117.

Hazzan, O. and Zaskis, R. (2005). Reducing abstraction: The case of school mathematics. *Educational Studies in Mathematics,* 58**,** 101–119.

Kurz, T. L. and Garcia, J. (2012). The complexities of teaching prime decomposition and multiplicative structure with tools to preservice elementary teachers. *Journal of Research in Education,* 22(2), 169-193.

Meel, D. E. (2003). Models and theories of mathematical understanding: Comparing Pirie and Kieren's model of the growth of mathematical understanding and APOS theory. CBMS Issues in Mathematics Education, 12, 132-181.

Milli Eğitim Bakanlığı (2013). Ortaokul Matematik Dersi (5,6,7 ve 8. Sınıflar) Öğretim Programı. Ankara.

Milli Eğitim Bakanlığı (2013). Ortaöğretim Matematik Dersi (9,10,11 ve 12. Sınıflar) Öğretim Programı. Ankara.

Papadopoulos, I. and Iatridou, M. (2010). Modelling problem-solving situations into number theory tasks: The route towards generalisation. *Mathematics Education Research Journal*, Vol. 22/3, 85-110.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.

Smith, J. C. (2002). An investigation of undergraduates' understanding of congruence of integers. Unpublished doctoral dissertation. The Graduate College of The University of Arizona.

Şenay, H. (2007). *Sayılar Teorisi Dersleri*. Konya: Dizgi Ofset Matbaacılık.

Zazkis, R. and Campbell, S. R. (2011). Number theory in Mathematics Education: Perspectives and Prospects. In R. Zaskis & S. R. Campbell (Eds.), *Number theory in Mathematics Education: Perspectives and Prospects*. (Chp. 1). New York: Routledge.

Bu çalışmanın ilk hali, 30-31 Mayıs 2014 tarihlerinde İstanbul'da düzenlenen Yükseköğretimde Eğitim Araştırmaları ve Uygulamaları 1. Ulusal Kongresinde bildiri olarak sunulmuştur.

İletişim:

Ş. Can Şenay

E-posta: sabancan.senay@karatay.edu.tr