



**KTO KARATAY ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MEKATRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI
TEZLİ YÜKSEK LİSANS PROGRAMI**

**ZAMAN GECİKMELİ SİSTEMLERDE DÜŞÜK MERTEBELİ
KONTROLÖRLER İÇİN BASKIN KUTUP
YERLEŞİMİNİ SAĞLAYAN KONTROLÖR PARAMETRE KÜMESİNİN
HESAPLANMASI**

Muhammed UZMAN

Yüksek Lisans Tezi

**KONYA
Kasım 2022**

ZAMAN GECİKMELİ SİSTEMLERDE DÜŞÜK MERTEBELİ KONTROLÖRLER
İÇİN BASKIN KUTUP
YERLEŞİMİNİ SAĞLAYAN KONTROLÖR PARAMETRE KÜMESİNİN
HESAPLANMASI

Muhammed UZMAN

KTO Karatay Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Mekatronik Mühendisliği Anabilim Dalı
Tezli Yüksek Lisans Programı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Barış Samim NESİMİOĞLU

Konya
Kasım 2022

BİLDİRİM

Enstitü tarafından onaylanan Yüksek Lisans/Doktora tezimin tamamını veya herhangi bir kısmını basılı veya dijital biçimde arşivleme ve aşağıda belirtilen koşullar dahilinde erişime açma iznini KTO Karatay Üniversitesine verdiğimi bildiririm. Bu izinle, Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet haklarım bende kalacak ve gelecekteki çalışmalar (makale, kitap, lisans, patent vb.) için tezimin tamamının veya bir bölümünün kullanım hakları yalnızca bana ait olacaktır.

Tezimin bütünüyle kendi çalışmam olduğunu, başkalarının haklarını ihlal etmediğimi ve tezimin tek yetkili sahibi olduğumu beyan ve taahhüt ederim. Telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izinle kullanılması zorunlu olan kaynakları, yazılı izin alarak kullandığımı ve istenildiğinde izinlerin suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederim.

Yükseköğretim Kurulu tarafından yayımlanan “Lisansüstü Tezlerin Elektronik Ortamda Toplanması, Düzenlenmesi ve Erişime Açılmasına İlişkin Yönerge” kapsamında, tezim, aşağıda belirtilen koşullar haricince, YÖK Ulusal Tez Merkezi ve KTO Karatay Üniversitesi Açık Erişim Sisteminde erişime açılır.

Enstitü / Fakülte Yönetim Kurulu kararı ile tezimin erişime açılması mezuniyet tarihimden itibaren 2 yıl ertelenmiştir.¹

Enstitü / Fakülte Yönetim Kurulunun gerekçeli kararı ile tezimin erişime açılması mezuniyet tarihimden itibaren ... ay ertelenmiştir.²

Tezimle ilgili gizlilik kararı verilmiştir.³⁴

28 Kasım 2022

Muhammed UZMAN

¹ MADDE 6(1) Lisansüstü teze ilgili patent başvurusu yapılması veya patent alma sürecinin devam etmesi durumunda, tez danışmanının önerisi ve enstitü anabilim dalının uygun görüşü üzerine enstitü veya fakülte yönetim kurulu iki yıl süre ile tezin erişime açılmasının ertelenmesine karar verebilir.

² MADDE 6(2) Yeni teknik, materyal ve metotların kullanıldığı, henüz makaleye dönüşmemiş veya patent gibi yöntemlerle korunmamış ve internetten paylaşılması durumunda 3. şahıslara veya kurumlara haksız kazanç imkanı oluşturabilecek bilgi ve bulguları içeren tezler hakkında tez danışmanının önerisi ve enstitü anabilim dalının uygun görüşü üzerine enstitü veya fakülte yönetim kurulunun gerekçeli kararı ile altı ay aşmamak üzere tezin erişime açılması engellenebilir.

³ MADDE 7(1) Ulusal çıkarları veya güvenliği ilgilendiren, emniyet, istihbarat, savunma ve güvenlik, sağlık vb. konulara ilişkin lisansüstü tezlerle ilgili gizlilik kararı, tezin yapıldığı kurum tarafından verilir. Kurum ve kuruluşlarla yapılan işbirliği protokolü çerçevesinde hazırlanan lisansüstü tezlere ilişkin gizlilik kararı ise, ilgili kurum ve kuruluşun önerisi ile enstitü veya fakültenin uygun görüşü üzerine üniversite yönetim kurulu tarafından verilir. Gizlilik kararı verilen tezler Yükseköğretim Kuruluna bildirilir.

⁴ MADDE 7(2) Gizlilik kararı verilen tezler gizlilik süresince enstitü veya fakülte tarafından gizlilik kuralları çerçevesinde muhafaza edilir, gizlilik kararının kaldırılması halinde Tez Otomasyon Sistemine yüklenir.

ETİK BEYAN

KTO Karatay Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Tez Hazırlama ve Yazım Kurallarına uygun olarak Dr. Öğr. Üyesi Barış Samim NESİMİOĞLU danışmanlığında tarafımdan üretilen bu tez çalışmasında; sunduğum tüm veri, enformasyon, bilgi ve belgeleri bilimsel etik kuralları çerçevesinde elde ettiğimi, tüm değerlendirme, analiz, bulgu ve sonuçları bilimsel usullere uygun olarak sunduğumu, tez çalışmasında yararlandığım kaynakların tümüne bilimsel normlara uygun biçimde atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi, tezimin kaynak gösterilen durumlar dışında özgün olduğunu bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

28 Kasım 2022

Muhammed UZMAN

Biricik eşim Elif'e ve hayat neşem, kızım Zeynep Sare'ye ithafen.

TEŐEKKÖR

Bu çalışmada ve akademik hayatımda her tŸrlŸ desteği esirgemeyen, yol gŸsterici olan danıőmanım, hocam Dr. Őęr. Őyesi Barış Samim NESİMİŐGLU'na,

Zorlu tez çalışmam sŸresince sabırlı ve destekleyici olan eőime,

Beni yetiőtiren, yanımda olan anne ve babama, bana her zaman gŸzel bir Örnek olan ablama, sevgili kız kardeőtime,

KTO Karatay Őniversitesi Akıllı Teknolojiler Merkezindeki hepsi birbirinden değerli çalışma arkadaőtarıma ve yŸneticilerime,

teőtakkŸr ederim.

28 Kasım 2022

Muhammed UZMAN

ÖZET

Muhammed UZMAN

Zaman Gecikmeli Sistemlerde Düşük Mertebeli Kontrolörler İçin Baskın Kutup Yerleşimini Sağlayan Kontrolör Parametre Kümesinin Hesaplanması
Lisans Tezi

Konya, 2022

Kontrol sistemlerinin birçoğunda çeşitli sebeplerden ötürü zaman gecikmesine rastlanır. Zaman gecikmesi kontrol sisteminin karakteristik polinomunu sonsuz sayıda kökü olan polinomsulara dönüştürür. Sonsuz sayıda kökü olan polinomsular zaman gecikmeli sistemlerin sistem performansı anlamında analizini zorlaştırmaktadır. Bu durum performans kriterlerinin en önemli ve olmazsa olmazı olan kararlılık konusunda da geçerlidir. Bu bağlamda tez kapsamında zaman gecikmeli sistemlerin kararlılık analizini yapan metotlar incelenecektir.

Baskın kutup yerleşimi bir kontrol sisteminin performansını ve kararlılığını belirlemede etkili olan bir yöntemdir. Sistemin performansını atadığı iki eşlenik köke göre şekillendiren baskın kutup yerleşimi yöntemi dayanıklı kontrolcü tasarımı açısından önemli avantajlara sahiptir. Düşük mertebeden kontrolörler kullanım kolaylığı ve yaygınlığı düşünüldüğünde kontrol sistemleri içinde önemli bir yer işgal etmektedir.

Faz ileri telafisi geçici durum cevabında önemli bir gelişmeye yol açabilirken faz geri telafisi de kalıcı durum cevabındaki doğruluğu açısından önemli bir avantaja sahiptir.

Baskın kutup yerleşimi zaman gecikmesiz ve zaman gecikmeli sistemlerde birçok düşük mertebeli kontrolörlerle, bilhassa PID kontrolör olmak üzere, çalışılmıştır. Ancak faz ileri faz geri kontrolcülerle zaman gecikmeli sistemlerde baskın kutup yerleşimi ile ilgili çalışma bulunmamaktadır.

Bundan yola çıkarak faz ileri geri kontrolcülerle baskın kutup yerleşimi yapabilmek için sisteme eklenen kontrolcüdeki sıfır ve kutup parametreleri kazanç parametresine bağlanarak, işlem tek parametreliliğe dönüştürülecektir. Zaman gecikmesiz sistemler için kök eğrisi yönteminden yola çıkarak, zaman gecikmeli sistemler için de Nyquist teoreminden ve Direkt metottan yardım alınarak faz ileri-geri kontrolörlerle baskın kutup yerleşimi yapılacaktır. Düşük mertebeden kontrolcüler kullanılarak zaman gecikmeli ve zaman gecikmesiz sistemlerde baskın kutup yerleşimini Nyquist ve Direkt metot ortak yardımıyla sağlayarak literatüre katkı sağlanacaktır.

Anahtar Kelimeler

Düşük mertebeli kontrolörler, baskın kutup yerleşimi, kararlılık, zaman gecikmeli sistemler.

ABSTRACT

Muhammed UZMAN

Calculating Set of Controller Parameters Allowing Dominant Pole Placement for Low
Order Controllers

Master's Thesis

Konya, 2022

Many control systems experience time delays for various reasons. The time delay transforms the characteristic polynomial of the control system into quasi-polynomials with infinitely many roots. Quasi-polynomials which has infinitely many roots complicates the analysis of time delayed systems in terms of system performance. This also applies to stability, which is the most important and indispensable performance criteria. In this context, the methods of stability analysis of time-delay systems will be examined within the scope of the thesis.

Dominant pole placement is an effective method for determining the performance and stability of a control system. The dominant pole placement method, which shapes the performance of the system according to the two conjugate poles it assigns, has significant advantages in terms of robust controller design. Low-order controllers occupy an important place in control systems considering their ease of use and prevalence.

Phase-lead compensation can lead to a significant improvement in transient response, while phase-lag compensation has a noteworthy advantage in its accuracy in steady-state response. Dominant pole placement method has been studied time-delay systems with many low-order controllers, especially PID controllers. However, there are no studies on dominant pole placement in time delay systems with phase-lead, phase-lag controllers.

Based on this, in order to make dominant pole placement with phase-lead, phase-lag controllers, zero and pole parameters in the control system connected to the gain parameter, the process will be converted to a single parameter problem. Based on the root-locus method for systems with no time delay, and with the help of Nyquist and Direct Method for time delay systems, dominant pole placement will be made with phase lead-lag controllers. Using low-order controllers, the dominant pole placement in time-delay and delay-free systems will be provided with the joint help of Nyquist and Direct method, and a contribution to the literature will be made.

Keywords

Low-order controllers, dominant pole placement, stability, time delay systems.

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	i
BİLDİRİM	ii
ETİK BEYAN.....	iii
TEŞEKKÜR.....	v
ÖZET.....	vi
ABSTRACT.....	vii
İÇİNDEKİLER	viii
TABLolar DİZİNİ	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	x
SİMGELER DİZİNİ.....	xi
KISALTMALAR DİZİNİ.....	xiv
1. GİRİŞ	1
2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI	4
2.1. Zaman Gecikmeli Sistemler	7
2.2. Zaman Gecikmeli Sistemlerde Kararlılık Analizi Yöntemleri.....	10
2.2.1. Zaman Gecikmesinin Polinom Yaklaşımları.....	10
2.2.2. Hermite-Biehler	16
2.2.3. Direkt Metot.....	22
2.2.4. Nyquist Yöntemi.....	27
3. BASKIN KUTUP YERLEŞİMİ	32
3.1. Zaman Gecikmesiz Sistemler İçin Baskın Kutup Yerleşimi.....	32
3.2. Zaman Gecikmeli Sistemler İçin Baskın Kutup Yerleşimi	37
SONUÇ	49
KAYNAKLAR	50
ÖZGEÇMİŞ	58

TABLÖLAR DİZİNİ

Tablo 1. Routh Tablosu.....	15
-----------------------------	----

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. Birinci Dereceden Zaman Gecikmeli Sistem.....	7
Şekil 2. Döngü İçindeki Gecikme	8
Şekil 3. Geri Bildirimdeki Gecikme	8
Şekil 4. Girişteki Gecikme	9
Şekil 5. Örnek 1'in 1. Dereceden Padè Yaklaşımının birim basamak cevabı.....	13
Şekil 6. Örnek 1'in 3. dereceden Padè Yaklaşımının birim basamak cevabı	14
Şekil 7. Örnek 2'nin $K=5$ için 1. dereceden Padè Yaklaşımının birim basamak cevabı	15
Şekil 8. Örnek 2'nin $K=15$ için 1. dereceden Padè Yaklaşımının birim basamak cevabı	16
.....	
Şekil 9. Örnek 3 için ardışıklık özelliği	19
Şekil 10. (35) denkleminin kökleri.....	20
Şekil 11. Örnek 4 için ardışıklık özelliği	22
Şekil 12. Örnek 6'nın Nyquist Diagramı	29
Şekil 13. Örnek 6'nın $K=1,5$ için birim basamak cevabı.....	30
Şekil 14. Örnek 6'nın $K = 3$ için birim basamak cevabı.....	31
Şekil 15. 3.1 ve 3.2'de kullanılacak kontrol sistemi	33
Şekil 16. Örnek 7'nin kök-yer eğrisi.....	35
Şekil 17. Örnek 7'deki sisteme faz geri kontrolcü uygulandığında oluşan birim basamak cevabı	36
Şekil 18. (95) için düzenlenmiş Nyquist eğrisi	40
Şekil 19. Faz ileri kontrolcü kullanıldığında oluşan sıfır-kutup haritası.....	41
Şekil 20. Faz ileri kontrolcü uygulandığında Örnek 8'in birim basamak cevabı.....	42
Şekil 21. (102) için düzenlenmiş Nyquist Eğrisi	44
Şekil 22. Faz ileri kontrolcü uygulandığında Örnek 9'un birim basamak cevabı.....	45
Şekil 23. (110) için düzenlenmiş Nyquist eğrisi	47
Şekil 24. Oluşan faz-ileri kontrolcü uygulandığında Örnek 10'un birim basamak cevabı	48
.....	

SİMGELER DİZİNİ

Simge	Açıklama
k_p	Oransal kontrolör parametresi
k_i	İntegral kontrolör parametresi
k_d	Türev kontrolör parametresi
$u(t)$	Zaman tabanında giriş fonksiyonu
$y(t)$	Zaman tabanında çıkış fonksiyonu
$F(s)$	Rasyonel transfer fonksiyonu
$N(s)$	Pay polinomu
$D(s)$	Payda polinomu
e^{-sL}	Zaman gecikmesi terimi
e^x	Taylor açılımı için kullanılan üstel terim.
$N_r(sL)$	Pade yaklaşımının pay polinomu
$D_r(sL)$	Pade yaklaşımının payda polinomu
$N_1(sL)$	Birinci dereceden Pade yaklaşımının pay polinomu
$D_1(sL)$	Birinci dereceden Pade yaklaşımının payda polinomu
$N_3(sL)$	Üçüncü dereceden Pade yaklaşımının pay polinomu
$D_3(sL)$	Üçüncü dereceden Pade yaklaşımının payda polinomu
$G(s)$	Transfer fonksiyonu
$G_1(s)$	Birinci dereceden Pade yaklaşımı uygulanan transfer fonksiyonu
$G_3(s)$	Üçüncü dereceden Pade yaklaşımı uygulanan transfer fonksiyonu
$T(s)$	Kapalı çevrim karakteristik denklemi
V_1	Polinomsular için birinci varsayım
V_2	Polinomsular için ikinci varsayım
$T^*(s)$	Düzenlenmiş karakteristik denklem
$f(s, e^s)$	Polinomsuları ifade eden fonksiyon
$T^*(jw)$	Frekans tabanında düzenlenmiş karakteristik denklem.
$T_r(w)$	Frekans tabanında düzenlenmiş karakteristik denklemin reel kısmı.

$T_i(w)$	Frekans tabanında düzenlenmiş karakteristik denklemin imajiner kısmı.
β	$T_r(w)$ ve $T_i(w)$ fonksiyonlarındaki en yüksek mertebeli terimin katsayısı.
A	Frekans aralığı.
d_n	En yüksek mertebeli payda teriminin katsayısı.
n_n	En yüksek mertebeli pay teriminin katsayısı.
e^{-jwL}	Zaman gecikmesi teriminin frekans tabanındaki gösterimi.
$D(jw)$	Payda polinomunun frekans tabanındaki gösterimi.
$N(jw)$	Pay polinomunun frekans tabanındaki gösterimi.
$W(w^2)$	Payda polinomunun pay polinomuna oranının mutlak değerinin 1 olduğunu test etmek için kullanılan polinom.
$\cos(w_iL)$	Belirli bir frekans için payda polinomunun pay polinomuna oranının reel kısmı.
$\sin(w_iL)$	Belirli bir frekans için payda polinomunun pay polinomuna oranının imajiner kısmı.
L_{k_i}	İmajiner eksenden kutup geçişlerinin olduğu gecikme miktarı.
$Re\left(\frac{ds}{dL}\right)_{s=jw_i}$	Kapalı çevrim transfer fonksiyonun karakteristik denkleminin zaman gecikmesine göre türevinin reel kısmı.
w_{krt}	Nyquist eğrisinin reel eksenini kestiği frekans.
K_{krt}	Nyquist eğrisinin $(-1,0)$ noktasından geçmesi için gerekli oransal kazanç.
$C(s)$	Kontrolör
z	Faz ileri-geri kontrolör için sıfır parametresi.
p	Faz ileri-geri kontrolör için kutup parametresi.
$H(s)$	Kapalı çevrim transfer fonksiyonu.

$p_{1,2}$	Baskın eşlenik kutuplar.
$G(p_1)$	s yerine baskın eşlenik kutupların yazılması ile oluşan transfer fonksiyonu.
X	Baskın eşlenik kutupların yazılması ile oluşan transfer fonksiyonunun imajiner kısmı.
Y	Baskın eşlenik kutupların yazılması ile oluşan transfer fonksiyonunun reel kısmı.
$G^r(s)$	Kök eğrisi formuna getirilmiş transfer fonksiyonu.
$G_0^r(s)$	Nyquist formuna getirilmiş transfer fonksiyonu.
$P_{G_0^r}$	Nyquist formuna getirilmiş transfer fonksiyonu için istenen bölge dışında kalan kutup sayısı.
$N_{G_0^r}$	-1 noktasına göre saat yönündeki çevreleme sayısı.

KISALTMALAR DİZİNİ

Kısaltma	Açıklama
DZD	Doğrusal Zamanla Değişmeyen
GPS	Küresel Konumlama Sistemi
K	Kazanç Parametresi Değeri
L	Zaman Gecikmesi Miktarı
N	Nyquist Eğrisinin -1 Noktasını Çevreleme Miktarı
P	Oransal Kontrolör
PI	Oransal-İntegral Kontrolör
PID	Oransal-İntegral-Türev Kontrolör
S	Açık Çevrim Transfer Fonksiyonunun Kararsız Kutup Sayısı

1. GİRİŞ

Günlük hayatta veya endüstrideki sistemlerin birçoğunda farklı sebeplerden kaynaklanan zaman gecikmelerine veya ölü zamanlara rastlanmaktadır. Endüstrideki bu alanlara kimyasal sistemler, biyolojik sistemler, ulaşım sistemleri, mekanik sistemler, elektro-mekanik sistemler, dijital iletişim sistemleri gibi birçok örnek verilebilir.

Basit bir örnek olarak bir apartmanın merkezi ısıtma sistemi verilebilir. Isıtma kazanı çoğu apartmanda bodrum katındadır ve boru tesisatıyla dairelere ve odalara taşınır. Yakıt vanası açıldığında kazandaki su ısınmaya başlar ve su istenilen sıcaklığa geldikten sonra bu suyun odalara iletilmesi için belirli bir süre beklenmesi gerekecektir. Aradaki bu ölü zaman hazır durumda olan sıcak suyun merkezi sistemden odalardaki kaloriferlere taşınması için gereken zamana, bu zaman da suyun gideceği mesafeye ve debi değerlerine bağlı olacaktır.

Zaman gecikmeleri iletişim sistemlerinde de yadsınamaz bir önem arz etmektedir. Buna bir örnek olarak da bir çalışmada Klobuchar, GPS verilerini alırken iyonosferin kompleks yapısından kaynaklanan zaman gecikmesi ve belirsizliklerle karşılaşmıştır. Klobuchar bu etkileri yok etmek için bir zaman gecikmesi düzeltme algoritması önermiştir (Klobuchar, 1987).

Ölü zamanlar temelde enerjinin, kütleinin ya da bilginin taşınması için gereken zamandan kaynaklanmaktadır. Bunun yanında ölü zamanlar kapalı çevrim bir sistemde sensörlerin gereken ölçümü yapabilmesi için gereken süre, kontrolöre gelen ölçüm hata verisinin işlenmesi ve tekrar çıkışa göndermesi esnasında harcanacak toplam zamandan da kaynaklanabilir.

Bu duruma bir başka örnek verilecek alan biyolojik sistemler olabilir. Zaman gecikmesi lösemi hastalarının bağışıklık sistemlerinin tepki vermesindeki modellerde ortaya çıkmaktadır (Kim vd., 2008). Yine epidemik hastalıkların hücreden hücreye yayılma modellerinde zaman gecikmesi ortaya çıkmakta ve bu durum hesaba katılmaktadır (Culshaw vd., 2003).

Kontrol sistemlerinde kararlılık analizi uzun süredir üzerinde çokça çalışılan, yaygın bir alandır. Sürekli zamanlı doğrusal zamanlı değişmeyen (DZD) sistemlerde kapalı çevrim karakteristik polinomu üzerinden cebirsel analiz yaparak sonuca ulaşan kararlılık

yöntemlerinin en çok kullanılanlarından biri Routh-Hurwitz kriteridir. Yine kapalı çevrim karakteristik polinomu üzerinden hesap yapan metotlardan biri de Hermite-Biehler yöntemidir. Kapalı çevrim karakteristik polinomunun kararlılık üzerindeki etkisini Routh (1877) ispatlamıştır. Hurwitz (1895) de karakteristik polinomun kararlılık analizinde nasıl kullanılacağı probleminin çözümünü bulmuştur. Kararlılık analizini açık çevrim sistemi temel alarak yapan da çeşitli yöntemler literatürde bulunmaktadır. Bu yöntemlerin en bilinenleri de kök eğrisi (root locus), Bode diyagramları ve Nyquist kararlılık kriteri (Nyquist, 1932) yöntemleri gelmektedir. Kararlılık analizini ayrık zamanlı sistemler için yaygın bir şekilde kullanılan yöntemler ise Jury kararlılık kriteri (Jury & Paynter, 1975) vs Schur-Cohn matris testleridir.

Sürekli zamanlı zaman gecikmesiz DZD bir sistemin karakteristik polinomu sınırlı sayıda kökler içerirken zaman gecikmeli DZD bir sistemin karakteristik denklemi polinomsuya dönüşecek ve bu polinomsuların sonsuz sayıda kökü olduğu görülecektir. Bu durum DZD zaman gecikmeli sistemlerin üzerinde çalışılmasını zorlaştırmaktadır. Birçok proste karşılaşılan zaman gecikmesinin ortaya çıkardığı polinomsular üzerinde çalışılmış çeşitli yöntemler bulunmaktadır. Bu yöntemlere örnek olarak Hermite-Biehler teoreminin genelleştirilmiş versiyonu, Nyquist teoremi, Rekasius yöntemi, Direkt Metot, baskın kutup yerleşimi verilebilir.

Endüstride P, PI, PD, PID, faz-ileri, faz-geri gibi düşük mertebeli kontrolörlerin kullanım alanı oldukça geniştir. Zaman gecikmeli sistemler için bu kontrolcüler kullanılarak birçok kararlılık analizi yapılmıştır. Kararlılığı belirlemede tüm P, PI, PID, faz ileri-geri kontrolcü kümelerini bularak dayanıklı kontrolcü tasarımı yapan birçok çalışma bulunmaktadır. Baskın kutup yerleşimi de kararlılığı ve belirli performans kriterlerini sağlamak için kullanılan bir yöntem olarak öne çıkmaktadır. Zaman gecikmeli sistemlerde baskın kutup yerleşimi son zamanlarda popüler bir konu olmuştur. Fakat literatürde zaman gecikmeli sistemler için faz ileri-geri kontrolcü kullanarak baskın kutup yerleşimi yapan bir çalışma görülmemiştir.

Tezin işleyişi şu şekilde olacaktır.

- İkinci bölümün ilk kısmında zaman gecikmeli sistemlerde kararlılık analizi ve baskın kutup yerleşimi üzerine geniş bir literatür araştırması yapılmıştır.

- İkinci bölümün ikinci kısmında zaman gecikmeli sistemler üzerine yapılan çalışmalar özellikle polinom yaklaşımları, Hermite-Biehler teoremi, Direkt Metot, Nyquist teoremi kapsamında özetlenmiştir.
- Üçüncü bölümün birinci kısmında önce zaman gecikmesiz sistemler için baskın kutup yerleşimi faz ileri-geri kontrolcü ile yapılmıştır.
- Ardından üçüncü bölümün ikinci kısmında yine zaman gecikmeli sistemler için baskın kutup yerleşimi yine faz ileri-geri kontrolcü kullanılarak yapılmıştır.

Özellikle son iki madde literatüre zaman gecikmeli sistemler için baskın kutup yerleşimi konusunda katkılar sağlayacaktır.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Zaman gecikmesi birçok farklı kontrol mekanizmasında birçok farklı şekilde meydana gelebilir. Bunlara örnek olarak mekanik sistemler (Freitas, 2000), ekonomik ve sosyal modeller (Gori vd., 2016; Solow, 1956; Swan, 1956), biyolojik sistemler (Bunimovich-Mendrazitsky & Shaikhet, 2020; Culshaw vd., 2003; DeConde vd., 2005; Vielle & Chauvet, 1998), network sistemleri (Baillieul, 2004; Elia & Eisenbeis, 2011; Lu & Cen, 2011; Quet & Özbay, 2004; Quevedo vd., 2008; Su & Chen, 2013; Wu & Chen, 2007), elektronik sistemler (Lauss & Strunz, 2021; Ngouabo vd., 2020), insansız hava araçları (Bergeron vd., 2019; Kartal vd., 2020; Salinas vd., 2015; Slawiński vd., 2017), robotik sistemler (Abadia vd., 2021; Guo vd., 2019; Lazarević, 2006; Zhang & Zhang, 2020), kimyasal sistemler (Arlington vd., 2020; Hamdy & Ramadan, 2017; Mays vd., 1998) gibi birçok örnek verilebilir.

Daha önce de belirtildiği gibi DZD tek giriş çıkışlı zaman gecikmesi sistemin karakteristik denklemini polinomdan sonsuz sayıda kökleri olan polinomsuya dönüştürmektedir. Ortaya çıkan bu polinomsular üzerine çalışan ilk kişilerden biri Pontryagin'dir. Çalışmaları kapsamında belirli bir polinomsunun köklerinin gerçel olması için gerekli ve yeterli bağlantıları türetmiştir. Hatta bazı polinomsu sınıfların kararlılığını, bu bağlantıları kullanarak çalışmıştır (Chambers vd., 1965; Pontryagin, 1955). Zaman gecikmeli sistemlerde yapılan birçok çalışma Pontryagin'in çalışmalarının sonuçlarından faydalanmıştır.

Zaman gecikmeli sistemlerde kararlılık analizini yaklaşık olarak yapmak için başvurulan yöntemlerden biri Pade yaklaşımıdır. Fakat Pade yaklaşımı ile oluşturulan kararlı yapıcı kümelerinin zaman gecikmesinin az olduğu yerlerde gerçeğe yakın olsa da zaman gecikmesi arttıkça yaklaşımın da hatasının arttığı görülmüştür ve kontrolcü tasarımının Pade yaklaşımı ile yapılmasının sistemi kararsızlığa götürebileceği gösterilmiştir. Pade yaklaşımının mertebesi ile yaklaşıklık doğru orantılıdır. Pade yaklaşımının mertebesi yükseldikçe gerçeğe yakınlık artacak olsa da aynı zamanda sistemin mertebesi yükseleceğinden sistemin kompleksliği artacaktır (Datta & Bhattacharyya, 2001; Zheng vd., 1990). Zaman gecikmeli sistemlerde çeşitli filtreler kullanılarak çok yaygın olmasa da Pade yaklaşımının kullanımı devam etmektedir (Dong vd., 2019; Natori, 2012; Sawodny vd., 2010).

Bir kontrol sistemini kararlı yapacak tüm kontrolcülerin kümesinin bulunması fikrini, sabit bir k_p için (k_i, k_d) , kararlılık kümesini Ho, Datta ve Bhahtacharayya (1998) göstermişlerdir. Bu gösterimi Hermite-Biehler teoreminin genişletilmiş hali ile, zaman gecikmesine sahip olmayan sistemler için yapmışlardır. Silva, Datta ve Bhattacharyya ise bu yöntemi birinci dereceden zaman gecikmeli sistemleri için uyarlamışlardır (Silva vd., 2001; Suva vd., 2002). Bir başka çalışmada ikinci dereceden zaman gecikmeli sistemler için yine bu yöntem kullanılarak kararlı yapıcı PID kümeleri bulunmuştur (Ou vd., 2006). Wang yaptığı çalışmada daha yüksek mertebeden zaman gecikmeli sistemler için de kullanılacak şekilde bir algoritma geliştirmiştir (D. J. Wang, 2007). Yine başka bir çalışmada bu yöntemle zaman açık çevrim kararsız birinci dereceden sistemleri kararlı hale getiren PD kontrolcüler kümesi hesaplanmıştır (Marquez-Rubio, del Muro-Cuéllar ve Álvarez Ramírez, 2014). Bu yöntemi kullanan birçok çalışma bulunmaktadır (Elmadssia vd., 2013; Lee vd., 2010; Martelli, 2009; Parada vd., 2017).

Zaman gecikmelerinde kararlılık analizi için kullanılan yöntemlerden biri de Nyquist teoremidir. Nyquist teoreminin avantajı zaman gecikmeli sistemlerde değişime uğramadan kullanılabilmesidir. Bu avantajın sebebi de Nyquist teoreminin frekans cevabı temelli bir yöntem olmasıdır. Munro vd. yaptıkları çalışmada Nyquist eğrisinin reel eksenine kestiği yerlerin ve yönlerinin hesaplanmasından yola çıkarak, kazanç aralıkları için kararsız kutup sayısını buldukları Nyquist teoreminin geliştirilmesini yapmışlardır (Munro vd., 1999). Bu yöntem sabit bir k_p için sistemi kararlı kılan PID parametre kümesini bulmak için genişletilmiştir (Söylemez vd., 2003). Yapılan başka bir çalışmada kararlılığı sağlayan düşük mertebeli kontrolcüler kümesi, açık çevrim kararsız sistemler için hesaplanmış ve zaman gecikmeli sistemler için izin verilen en büyük zaman gecikmesi de farklı kontrolcüler için hesaplanmıştır (Xiang vd., 2007). Yine başka çalışmalarda Nyquist teoremi baz alınarak, sırasıyla kararlılığı sağlayan P, PI ve PID kontrolörler kümesi bulunmuştur (Almodaresi & Bozorg, 2014, 2015; D. J. Wang, 2009).

Zaman gecikmeli sistemlerde kararlılık analizi yapmak için kullanılan bir başka yöntem de Rekasius yöntemidir. Bu yöntem herhangi bir grafik işlemi yapmadan zaman gecikmesi terimine cebirsel ikame sunarak kararlılık testi yapabilmeyi önermektedir (Rekasius, 1980). Zaman gecikmeli sistemler için bu yöntemi kullanarak çeşitli çalışmalar yapılmıştır (Hertz vd., 1984; Olgac & Sipahi, 2002; Thovvsen, 1981).

Direkt Metot da zaman gecikmeli sistemlerde kararlılık analizi yapmak için kullanılan başka bir yöntemdir. Yöntem Walton ve Marshall tarafından önerilmiştir (Walton & Marshall, 1987). Nesimioglu ve Söylemez, Silva ve diğerlerinin (2000) Hermite Biehler yöntemini kullanarak yaptığı zaman gecikmeli sistemlerde kararlı yapıcı oransal kontrolcülerin hesaplanmasını Walton ve Marshall tarafından önerilen Direkt Metodu kullanarak yapmışlardır (Nesimioglu & Soylemez, 2012). Bu çalışmalarını tersi de nedensel birinci mertebeden sistemler için genişletmişlerdir (Nesimioglu & Soylemez, 2016a). Yapılan başka bir çalışmada birinci dereceden açık çevrim kararsız zaman gecikmeli sistemleri kararlı hale getiren PID kontrolcüler kümesini bulmuşlardır (Márquez-Rubio, Del-Muro-Cuéllar, Velasco-Villa ve Novella-Rodríguez, 2012). Bir başka çalışmada üçüncü dereceden açık çevrim kararsız sistemlerin kararlılık analizi bu yöntemle yapılmıştır (Hernández-Pérez vd., 2013).

Kararlılık analiz yöntemlerinden bir başkası da kök eğrisi yöntemidir. Kutup yerleşimi de durum uzayı ve klasik polinom yöntemlerinde geniş olarak kullanılmaktadır. Kapalı çevrim cevabında kararlılık yanında, aşım ve oturma zamanı gereksinimlerini de sağlamak için kutup çifti seçip sisteme yerleştirerek kontrol etme yöntemine baskın kutup yerleşimi denir. Baskın kutup yerleşimi ilk olarak Persson ve Astrom tarafından önerilmiştir (Persson & Åström, 1992). Bu yöntemin geniş açıklaması yayımlanan kitapta yapıldı (Astrom, 1995). Önerilen yöntem basitleştirilmiş sistemleri baz alarak yapıldığından, seçilen kutupların baskın olduğu garanti olamayabilir. Yüksek dereceden sistemler veya zaman gecikmeli sistemler söz konusu olduğunda, bu yöntem dikkat edilmezse kararsızlığa bile yol açabilir. Bu sorundan yola çıkarak, Wang ve diğerleri seçilen kutupların baskın olmasından ve sistemin kararlılığından emin olunabilecek bir çalışma yaptılar. Bu çalışmada zaman gecikmesiz sistemler için kök eğrisi, zaman gecikmeli sistemler için de Nyquist teoremini kullanarak baskın kutup yerleşimi yapmışlardır. Sonuç olarak garantili kutup yerleşimi ile elde edilen PID kullanılarak iki metot önerilmiştir (Q. G. Wang vd., 2009). Zaman gecikmeli PID kontrol döngüleri için baskın üç kutup yerleşimi yapılarak boyutsal analiz yapan bir çalışma yapılmıştır (Zitek vd., 2013). Baskın kutup yerleşimi problemini D-dekompozisyon yöntemi ile çözen bir çalışma yapılmıştır (Mandić vd., 2017). Başka bir çalışmada standart düzenlenmiş PID kontrolcüsünün baskın kutup yerleşimi yöntemindeki sınırlar analiz edilmiştir. Bu çalışma standart PID kontrolcüsüne alternatif olabilecek olan PI-D, I-PD,

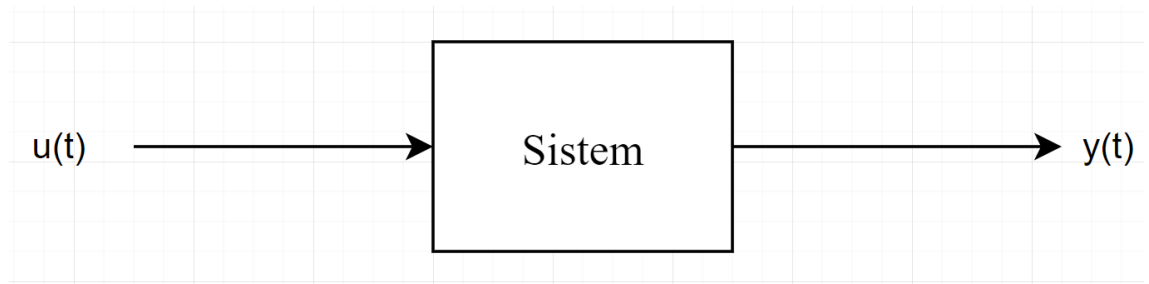
PI-PD, PD-PID gibi kontrolcüler ile baskın kutup yerleşimi problemine çözümler sunmuştur (Du vd., 2019). Yine PID kontrolcü kullanılarak ikinci dereceden zaman gecikmeli sistemler için baskın kutup yerleşimi yapan bir çalışma yapılmıştır (Das vd., 2020). Birinci dereceden açık çevrim kararsız sistemler için baskın kutup yerleşiminin performans ve dayanıklılığını analiz eden bir çalışma yapılmıştır (Ma vd., 2022). Endüstriyel bir çalışmada fotovoltaik bir sistemin güç kontrolünde dayanıklı kontrol için kullanılan yöntemlerden biri de baskın kutup yerleşimidir (Guentri vd., 2021). Bir modüler reaktörün kontrolü için baskın kutup yerleşimi yöntemi kullanılmıştır (Zarei, 2020). Sürekli zamanlı sistemler üzerinde yapılan bu çalışmaların yanında dijital sistemler için de baskın kutup yerleşimi ilgi konusu olmuştur (Dincel & Söylemez, 2018, 2022; Mammadov vd., 2022).

Literatürde faz ileri-geri kontrolcü ile zaman gecikmesiz ve zaman gecikmeli sistemlerde baskın kutup yerleşimi yapan çalışma görülmemektedir. Bu tezde zaman gecikmeli sistemler için kararlılık analizi yapan yöntemler incelenecektir. Ayrıca literatüre yenilik getirecek olan faz ileri-geri kontrolcü ile zaman gecikmesiz sistemlerde kök eğrisi, zaman gecikmeli sistemlerde Nyquist yöntemi ve Direkt Metot birlikte kullanılarak baskın kutup yerleşimi yapılacaktır.

2.1. Zaman Gecikmeli Sistemler

Girişinde, çıkışında veya iç yapısında zaman gecikmesi bulunan kontrol sistemleri Zaman Gecikmeli Kontrol Sistemleri olarak adlandırılır.

Birinci dereceden zaman gecikmeli bir sistem Şekil 1.deki gibi ifade edilebilir.

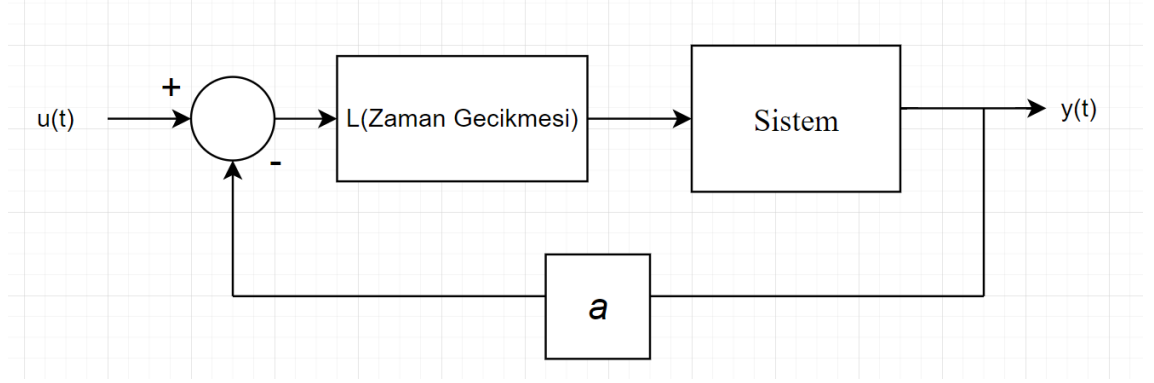


Şekil 1. Birinci Dereceden Zaman Gecikmeli Sistem

L büyüklüğünde bir zaman gecikmesi için yukarıdaki sisteme karşılık gelen denklem aşağıda verilmiştir.

$$y(t) = u(t - L) \quad (1)$$

Zaman gecikmesi kapalı çevrim sistemlerde Şekil 2’de ifade edildiği gibi döngünün içinde görülebilir.

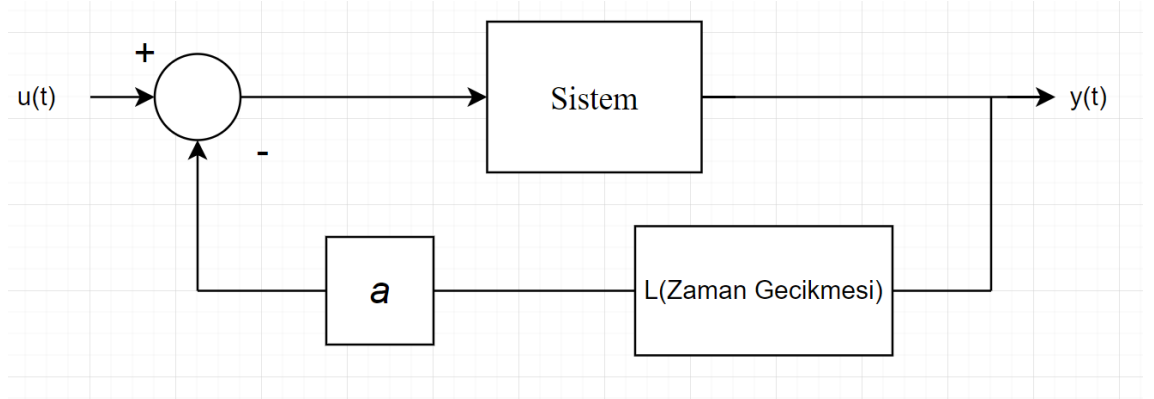


Şekil 2. Döngü İçindeki Gecikme

Bu sistemin giriş çıkış denklemi şu şekilde ifade edilebilir.

$$u(t - L) = y(t) + ay(t - L) \quad (2)$$

Zaman gecikmesi Şekil 3’teki gibi kapalı çevrim sistemin geri bildirim kısmında da olabilir. Bu gecikmeler genellikle sensör kaynaklıdır.

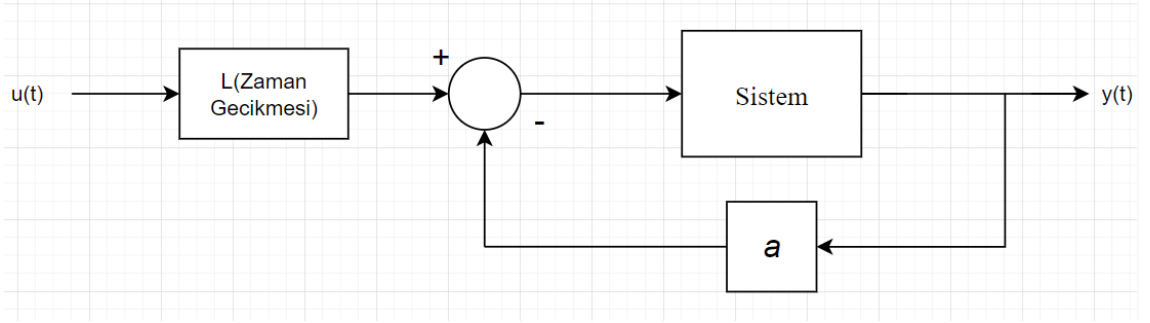


Şekil 3. Geri Bildirimdeki Gecikme

Bu gecikmeye de karşılık gelen eşitlik aşağıdaki gibi oluşmaktadır.

$$u(t) = y(t) + ay(t - L) \quad (3)$$

Zaman gecikmesine sistemin girişinde de Şekil 4'te görüldüğü gibi karşılaşılabılır.



Şekil 4. Girişteki Gecikme

Girişinde gecikme olan sisteme karşılık gelen eşitliğin ifadesi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$u(t - L) = y(t) + ay(t) \quad (4)$$

Yukarıda verilen gecikmelerin dışında bir sistemin birden fazla noktasında da gecikme meydana gelebilir. Bu duruma da çoklu zaman gecikmesi adı verilir.

Zaman gecikmeli sistemlerin analizi zaman gecikmesi bulundurmeyen bir sisteme göre daha güç olmaktadır. Bu da zaman gecikmeli bir kontrol sisteminin tasarımını zorlaştırmaktadır. Bunun yanında zaman gecikmesinin bir kontrol sistemini olumsuz etkilemesi muhtemel bir olgudur. Bir kontrol sisteminin en önemli ve gözardı edilemez performans kriterlerinden biri kararlılıktır. Zaman gecikmesi arttıkça sistemi kararsızlığa götürmesi muhtemeldir. Ve bu kararsızlığın önüne geçecek kontrolcünün tasarlanması zorlaşacaktır.

Mevzuya sözel olarak yaklaşıldığı takdirde, şüphesiz ki zaman gecikmesi, kontrolcünün şuan aldığı bir aksiyonun etkisinin belirli bir zaman geçmeden anlaşılmasına sebep olacaktır. Aynı zamanda, zaman gecikmesinin ortaya çıktığı yere göre, çıkış hatasını düzeltmek için şu anda aksiyon alan kontrol sistemi aslında belirli bir zaman önceki çıkış hatasını düzeltmeye çalışıyor olabilir. Bir bozulmanın etkisi belli bir zaman geçmeden ortaya çıkmayacaktır. Bu zorluk frekans tabanında da açıklanacak olursa, zaman gecikmesi sistem fazında fazladan bir düşme meydana getirecektir. Bu etkinin de kararlılığı bozma ihtimali bulunmaktadır.

Zaman gecikmesinin sözel olarak ifade edilen bu anlamları matematiksel olarak da açıklanacaktır. Zaman gecikmesinin teorik olarak getirdiği en önemli değişim zaman gecikmesiz sistemlerde kapalı çevrim bir sistemin karakteristik denklemi bir polinom ile ifade edilebilirken, zaman gecikmeli sistemlerde ise kapalı çevrim bir sistemin karakteristik denkleminin polinom ile ifade edilememesi, bunun yerine polinomsular adı verilen yapıların polinomların yerini almasıdır. Polinomsuları sonsuz sayıda kökü olan polinom zincirleri olarak tanımlayabiliriz. Bu polinomsular kontrol sistemlerinin kapalı çevrim karakteristik denkleminin sonsuz sayıda kutbunun olmasına sebep olmaktadır. Bu durumdan dolayı zaman gecikmeli sistemlerin analizi zaman gecikmesiz sistemlere göre çok zor bir hal almaktadır. Bir kontrol sisteminden beklenen en öncelikli kriter, sistemin kararlı olmasının teminidir, zira kararlı olmayan bir sistemde geriye kalan performans kriterlerinin de bir anlamı olmamaktadır. Zaman gecikme etkilerinin ilk bakışta anlaşılmadığı gibi, çoğu durumda zaman gecikmesinin çoğunlukla sistemler üzerinde kararsızlığa götürücü bir etkisi olmasına rağmen, bazı kararsız durumdaki sistemleri de kararlı duruma getirici bir etkisi olabilmektedir (Nesimioglu & Soylemez, 2016b). Fakat zaman gecikmeli sistemlerde, sistemin karakteristik denkleminin sonsuz köke sahip olan polinomsulardan oluşması zaman gecikmeli sistemler üzerinde analizi ve kontrolör tasarımını zorlaştırmaktadır. Zaman gecikmesi olmayan sistemlerde kullanılan Hermite-Biehler, Routh Hurwitz gibi kararlılık analiz yöntemlerini zaman gecikmeli sistemlerde yukarıda bahsedilen sebeplerden dolayı direkt olarak kullanmak mümkün olmamaktadır. Root-locus gibi en çok kullanılan tasarım yöntemleri de zaman gecikmeli sistemlerde, kutup sayısının sonsuz olması nedeniyle direkt olarak kullanılamamaktadır.

2.2. Zaman Gecikmeli Sistemlerde Kararlılık Analizi Yöntemleri

Bu bölümde sürekli zamanlı doğrusal zamanla değişmeyen zaman gecikmeli sistemler için literatürde çokça karşılaşılan kararlılık analizi yöntemleri özetlenip tartışılacaktır.

2.2.1. Zaman Gecikmesinin Polinom Yaklaşımları

Frekans tabanında zaman gecikmesi doğrudan tanımlanabilir, bu nedenle frekans tabanlı metotların analizi ve tasarlanması yaklaşımlar olmadan kullanılabilir. Buna rağmen zaman gecikmeli bir sistemin transfer fonksiyonu rasyonel olmadığından kutup-sıfır

gösterimlerine ihtiyaç duyulduğunda, kutup yerleştirme yöntemlerinde veya kök eğrisi metotlarında ölü zamanın polinom yaklaşımları kullanılmaktadır.

Zaman gecikmesinin rasyonel olmayan ve e^{-sL} olarak ifade edilen gösterimi bir rasyonel transfer fonksiyon formunda, $F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ şeklinde farklı yaklaşımlar kullanılarak ifade edilebilir. Bu yaklaşımlar şu şekilde sıralanabilir.

- $e^{-sL} = \frac{1}{e^{sL}}$ ifadesinin bir Taylor serisi açılımı olarak;

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad -\infty < x < \infty \quad (5)$$

$$T_i(s) = \frac{1}{1 + \sum_1^i \frac{(sL)^i}{i!}}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (6)$$

- Çoklu gecikmeli transfer fonksiyonu olarak ();

$$e^{-sL} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{LS}{i}\right)^i}, \quad (7)$$

Bu ifadeyi i terimli kısaltmasını yazacak olursak

$$G_i(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{LS}{i}\right)^i}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (8)$$

- Padè yaklaşımı.

Padè yaklaşımı zaman gecikmesi terimini yaklaşık bir polinoma benzetmek için kullanılır. Padè yaklaşımı zaman gecikmeli bir sisteme uygulandığı zaman sistem zaman gecikmesiz bir sisteme yakınsanmış olur. Sistemin kararlılık analizini yapmak ve kontrolör tasarımı yapmak böylelikle kolaylaşacaktır.

$$e^{-sL} \cong \frac{N_r(sL)}{D_r(sL)} \quad (9)$$

Bu yaklaşımın pay ve paydası da şu şekilde yazılabilir.

$$N_r(sL) = \sum_{k=0}^r \frac{(2r-k)!}{k!(r-k)!} (-sL)^k \quad (10)$$

$$D_r(sL) = \sum_{k=0}^r \frac{(2r-k)!}{k!(r-k)!} (sL)^k \quad (11)$$

Örnek olarak birinci dereceden ve üçüncü dereceden Padé yaklaşımları şu şekildedir.

$$e^{-sL} \cong \frac{N_1(sL)}{D_1(sL)} = \frac{2 - Ls}{2 + Ls} \quad (12)$$

$$e^{-sL} \cong \frac{N_3(sL)}{D_3(sL)} = \frac{-L^3 s^3 + 12L^2 s^2 - 60Ls + 120}{L^3 s^3 + 12L^2 s^2 + 60Ls + 120} \quad (13)$$

Örnek 1

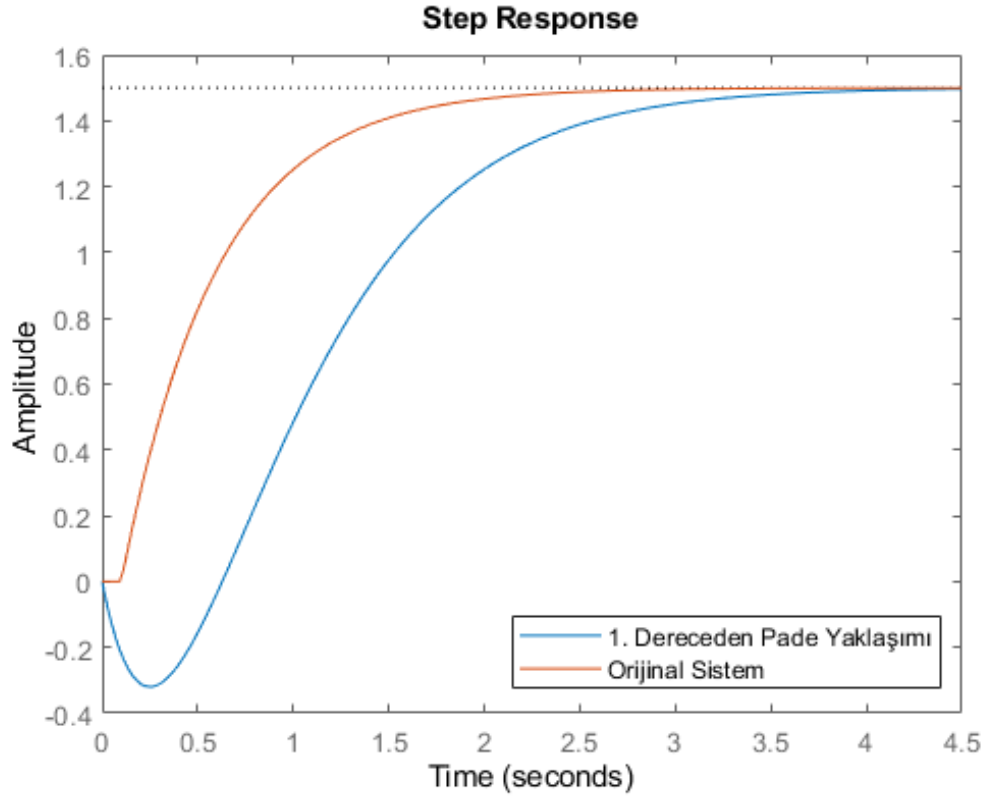
0.3s gecikmesi bulunan açık çevrim transfer fonksiyonunun kararlılığını 1. Ve 3. Dereceden Padé yaklaşımı kullanarak tespit ediniz.

$$G(s) = \frac{3}{s+2} e^{-0.3s} \quad (14)$$

Birinci dereceden Padé yaklaşımı kullanınca transfer fonksiyonu şu hale gelir.

$$G_1(s) = \frac{-3s + 6}{3s^3 + 7s^2 + 3s + 2} \quad (15)$$

$G_1(s)$ transfer fonksiyonuna birim basamak cevabını uygulanacak olursa;



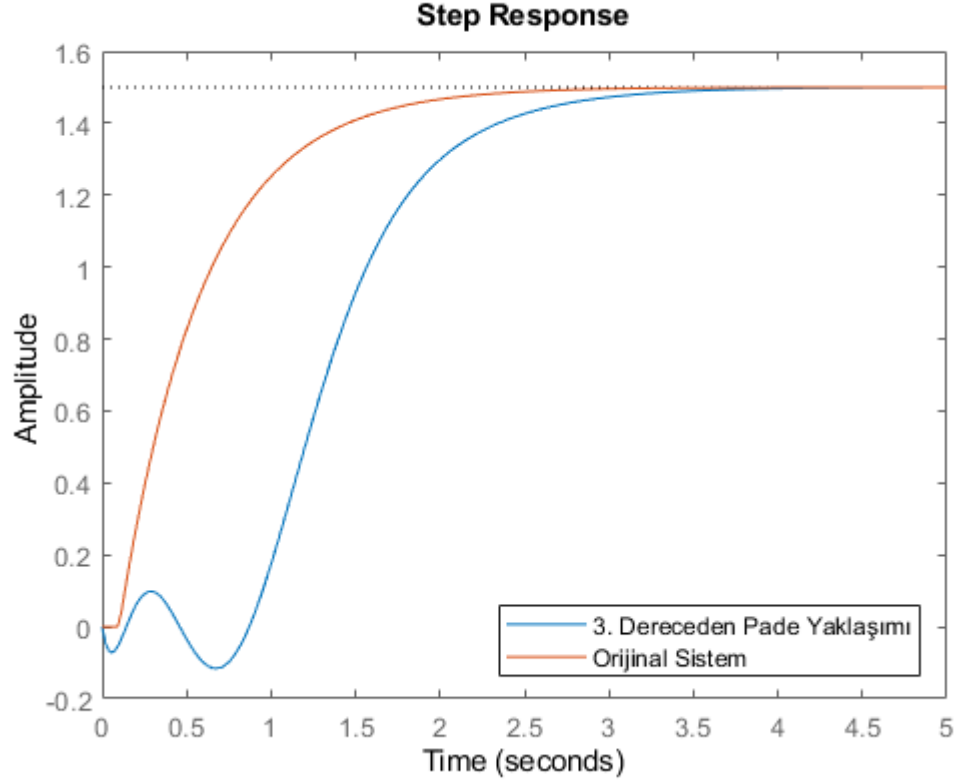
Şekil 5. Örnek 1'in 1. Dereceden Padé Yaklaşımının birim basamak cevabı

Şekil 5'teki grafikte sistemin kararlılık kriterleri sağlandığı görülmektedir. Aynı zamanda orijinal sistemin birim basamak cevabı ile karşılaştırılmıştır.

Üçüncü dereceden Padé yaklaşımı kullanınca transfer fonksiyonu şu hale gelir.

$$G_3(s) = \frac{3s^4 - 60s^3 + 540s^2 - 250s + 5040}{s^5 + 22s^4 + 220s^3 + 1200s^2 + 3360s + 3360} \quad (16)$$

$G_3(s)$ transfer fonksiyonunun birim basamak cevabını uygulanacak olursa;



Şekil 6. Örnek 1'in 3. dereceden Padè Yaklaşımının birim basamak cevabı

Şekil 6'daki grafikten de anlaşıldığı üzere sistem kararlılık kriterlerini sağlamaktadır. Ayrıca orijinal sistem ile de karşılaştırılmıştır.

Örnek 2.

1s gecikmesi bulunan açık çevrim transfer fonksiyonunu için sistemi kararlı hale getiren oransal kontrolçüler kümesini birinci dereceden Padè yaklaşımı kullanarak tespit ediniz.

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 12} e^{-s}, K = P \quad (17)$$

Birinci dereceden Padè yaklaşımı kullanılırsa kapalı çevrim transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi olur.

$$\frac{KG(s)}{1 + KG(s)} = \frac{K(2 - s)}{s^3 + 17s^2 + (22 - K)s + 24 + 2K} \quad (18)$$

Sistemin karakteristik polinomu üzerinden Routh tablosu oluşturulacak olursa,

Tablo 1. Routh Tablosu

s^3	1	22-K
s^2	17	24+2K
s^1	350-19K	
s^0	24+2K	

Tablo 1'deki ilk sütunun tamamının pozitif olması gerektiğinden dolayı aşağıdaki eşitsizlikler yazılabilir.

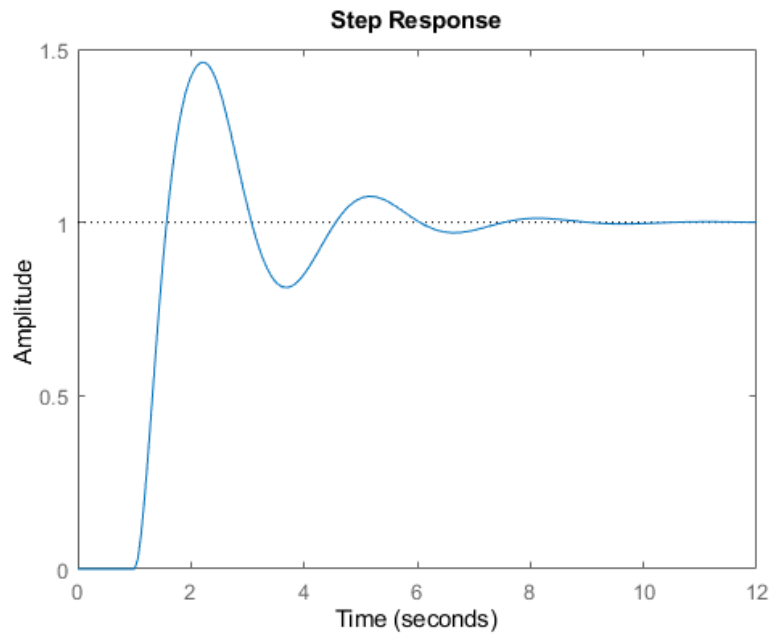
$$350 - 19K > 0, 18.42 > K$$

$$24 + 2K > 0, K > -12$$

(19)

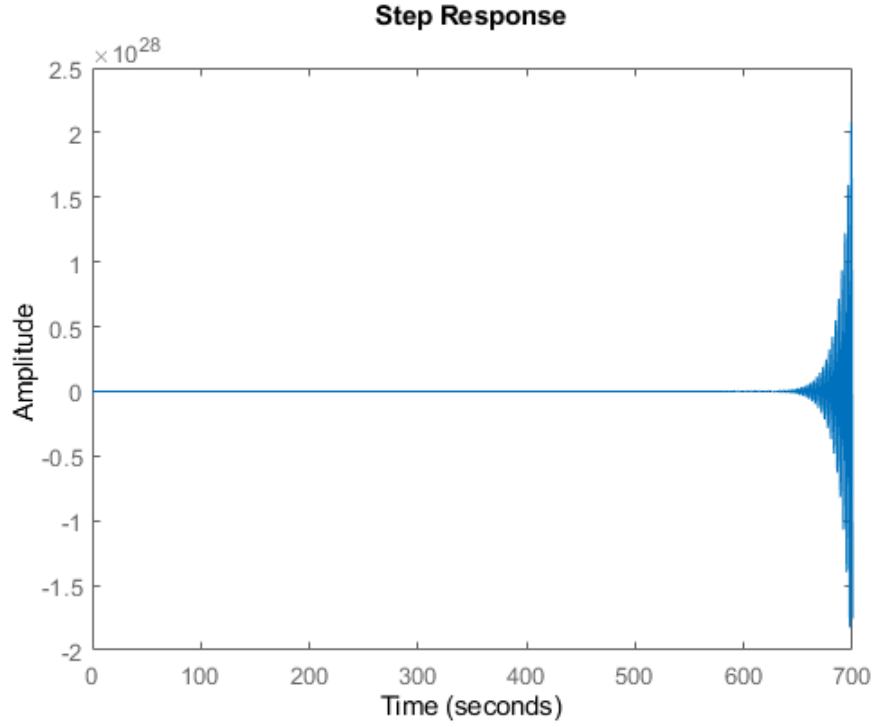
$$18,42 > K > -12$$

Bu aralıktaki K değerleri sistemi kararlı hale getirmesi gerektirir. K=5 için birim basamak cevabını aşağıdaki Şekil 7'deki grafikten görebiliriz.



Şekil 7. Örnek 2'nin K=5 için 1. dereceden Padé Yaklaşımının birim basamak cevabı

Yine bu aralıkta olan Şekil 8’de $K=15$ için birim basamak cevabını aşağıda görebiliriz.



Şekil 8. Örnek 2’nin $K=15$ için 1. dereceden Padè Yaklaşımının birim basamak cevabı

Şekil 7 ve Şekil 8’deki grafikler üzerinden görüleceği üzere oransal kazanç kümesinin içinde olan iki değerden sınırlara daha yakın olanı sistemi kararlı hale getirmemektedir.

Padè yöntemi ile elde edilen sonuçlar, Padè mertebesine göre ve yöntem yaklaşım yöntemi olmasından kaynaklanan hatalar içermektedir. Pade yaklaşımının mertebesi arttıkça doğruluğu artmaktadır, fakat mertebeyi arttırmak sistemin mertebesini arttıracak ve sistem daha karmaşık hale gelecektir. Zaman gecikmesi terimiyle bu terimin Padè yaklaşımı ile elde edilen transfer fonksiyonu arasındaki hata fonksiyonları Lam (1990) tarafından verilen yöntemle Padè yaklaşımının derecesine bağlı olarak hesaplanmıştır.

2.2.2. Hermite-Biehler

Bu kısımda Silva, Datta ve Bhattacharya’nın önermiş oldukları yöntem ve sonuçlar anlatılacaktır. Bu yöntem orantılı zaman gecikmesi içeren polinomsuların(quasi-polinom) kararlılık analizi için kullanılabilir (Silva vd., 2000).

Artan sıralı p kadar farklı gecikmesi bulunan bir sistem düşünelim;

$$L_i < L_{i+1} \quad (20)$$

Bu sistemin karakteristik quasipolinomu şu şekildedir;

$$T(s) = d(s) + e^{-sL_1}n_1(s) + e^{-sL_2}n_2(s) + \dots e^{-sL_p}n_p(s) \quad (21)$$

Bu quasipolinomlar için, şu varsayımlar yapılmıştır;

$$V_1: \deg d(s) = n \text{ ve } \deg n_i(s) \leq n \text{ for } i = 1, 2 \dots p \quad (22)$$

$$V_2: L_i = \beta L \text{ veya } i = 1, 2 \dots p \quad (23)$$

$T(s)$ 'i e^{sL_p} terimi ile çarpılacak olursa kutup pozisyonlarında herhangi bir değişim olmayacaktır. Bu çarpımdan,

$$T^*(s) = (e^s)^{L_p}d(s) + (e^s)^{(L_p-L_1)}n_1(s) + (e^s)^{(L_p-L_2)}n_2(s) + \dots n_p(s) \quad (24)$$

düzenlenmiş karakteristik polinomu elde edilir. $T^*(s)$ terimindeki s teriminin ve e^s teriminin en yüksek kuvvetli terimine esas terim denir. Pontryagin'e göre, eğer bir $f(s, e^s)$ şeklindeki bir fonksiyonun esas terimi yoksa, bu fonksiyonun sonsuz sayıda yeterince büyük pozitif reel kısmı olan kökleri bulunmaktadır. Bu sonuç V_1 varsayımı ile aynı anlama gelmektedir (Pontryagin, 1955).

V_1 ve V_2 varsayımlarının altında $T^*(s)$ formundaki quasipolinom için Silva ve ark. önerdiği aşağıdaki Teorem yazılabilir (Silva vd., 2000).

Teorem: $T^*(s)$ formundaki quasipolinomda s yerine jw koyup, quasipolinomun reel ve imajiner kısımlarını $T_r(w)$ ve $T_i(w)$ olarak yazın.

$$T^*(jw) = T_r(w) + j T_i(w) \quad (25)$$

$T^*(s)$ ancak ve ancak aşağıdaki durumlar sağlandığında kararlıdır.

- i) $T_r(w)$ ve $T_i(w)$ sadece basit köklere sahiptir ve bu kökler ardışık bir şekilde ortaya çıkar. (interlace)
- ii) *Monotonik faz artış özelliği.*

$$w \in (-\infty, \infty) \text{ için } \frac{d \arctan \frac{T_i(w)}{T_r(w)}}{dw} > 0 \quad (26)$$

Türevi alıp, ifadeyi daha sade bir hale getirirsek;

$$\frac{dT_i(w)}{dw} T_r(w) - \frac{dT_r(w)}{dw} T_i(w) > 0 \quad (27)$$

Yukarıda görüldüğü üzere ikinci şartın doğruluğunu kontrol etmek basit bir işlem olmasına rağmen ilk şartın doğruluğunu kontrol etmek daha karmaşık bir işlem gerektirir.

Bu nedenle bu Pontryagin'e göre bu fonksiyonların köklerinin gerçekliği aşağıdaki lemma yardımı ile hesaplanabilir.

Lemma n ve p , $T^*(s)$ fonksiyonunun e^s ve s terimlerinin en yüksek mertebeden kuvvetleri olsun.

$T_r(w)$ ve $T_i(w)$ fonksiyonlarındaki en yüksek mertebeli terimin katsayısına β diyelim.

Bu fonksiyonların sadece gerçel köklere sahip olması için gerek ve yeterli koşullar aşağıdaki her aralık için sağlanmaktadır.

$$-2l\pi + \beta \leq w \leq 2l\pi + \beta, \quad l = l_0, l_0 + 1, l_0 + 2 + \dots \quad (28)$$

$T_r(w)$ ve $T_i(w)$ fonksiyonlarının yeterince büyük l_0 için tam olarak $4lp + n$ kadar kökü vardır.

Hermite-Biehler teoreminin quasipolinomlar için kararlılık analizinin daha iyi anlaşılması için örnekler verilecektir.

Örnek 3.

0.3s gecikmesi bulunan açık çevrim transfer fonksiyonunun kararlılığını tespit ediniz.

$$G(s) = \frac{3}{s+2} e^{-0.3s} \quad (29)$$

Kapalı çevrim karakteristik denklemi aşağıdaki gibi olacaktır.

$$T(s) = s + 2 + 3e^{-0.3s} = 0 \quad (30)$$

$T(s)$ ile $e^{0.3s}$ ifadelerinin çarpımından elde edilen $T^*(s)$ aşağıdaki gibi gösterilmektedir.

$$T^*(s) = (s + 2)e^{0.3s} + 3 \quad (31)$$

A eşitliğinde s yerine jw koyulup imajiner ve reel parçalarına ayrılırsa,

$$T_r(jw) = 3 + 2 \cos(0.3w) - w \sin(0.3w) \quad (32)$$

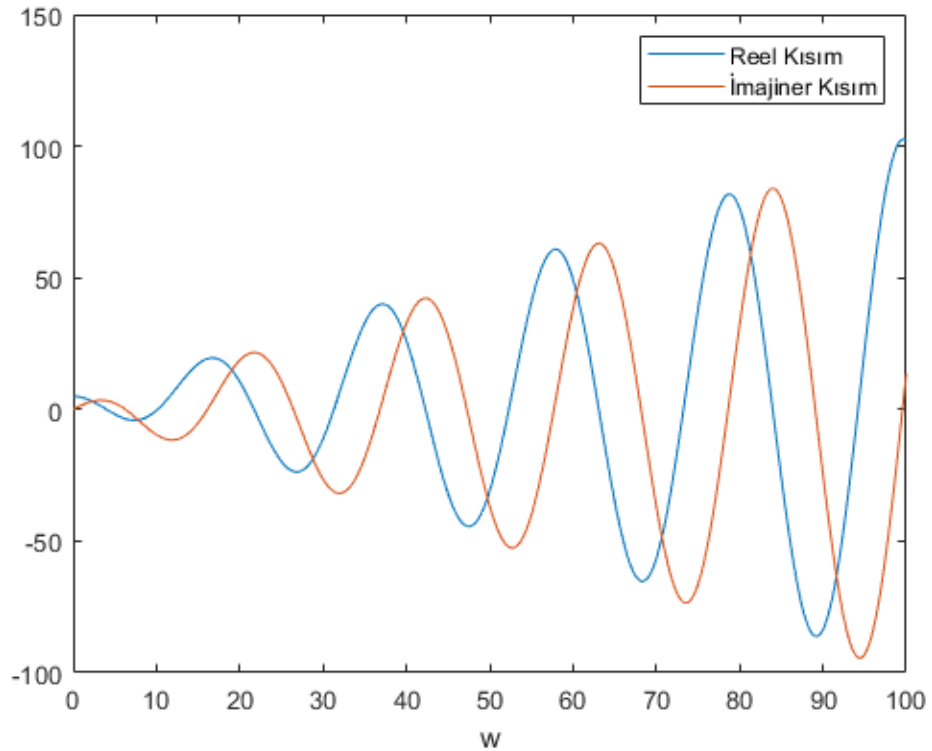
$$T_i(jw) = w \cos(0.3w) + 2 \sin(0.3w) \quad (33)$$

Teoremin şartlarından biri olan monotonik faz artışı $w_0 = 0$ için yazılacak olursa,

$$T'_i(0)T_r(0) - T'_r(0)T_i(0) = (1.6)(5) - (0)(0) > 0 \quad (34)$$

Bu şartın sağlandığı kolayca görülebilir.

Teoremin diğer şartını sağlayabilmek için $T_r(w)$ ve $T_i(w)$ polinomlarının köklerinin ardışık olması ve bu polinomların sadece gerçel köklerinin olması gerekir. Ne var ki bu polinomların sonsuz sayıda kökü vardır. Yüksek frekanslarda w sonsuza giderken $\frac{3}{jw+2}$ ifadesi ardışıklık geçme özelliğine sahiptir. Ardışıklık özelliğinin sonlu frekans bölgesinde kontrol edilmesi gerekmektedir. Bu durum Şekil 9'da gösterilmiştir.



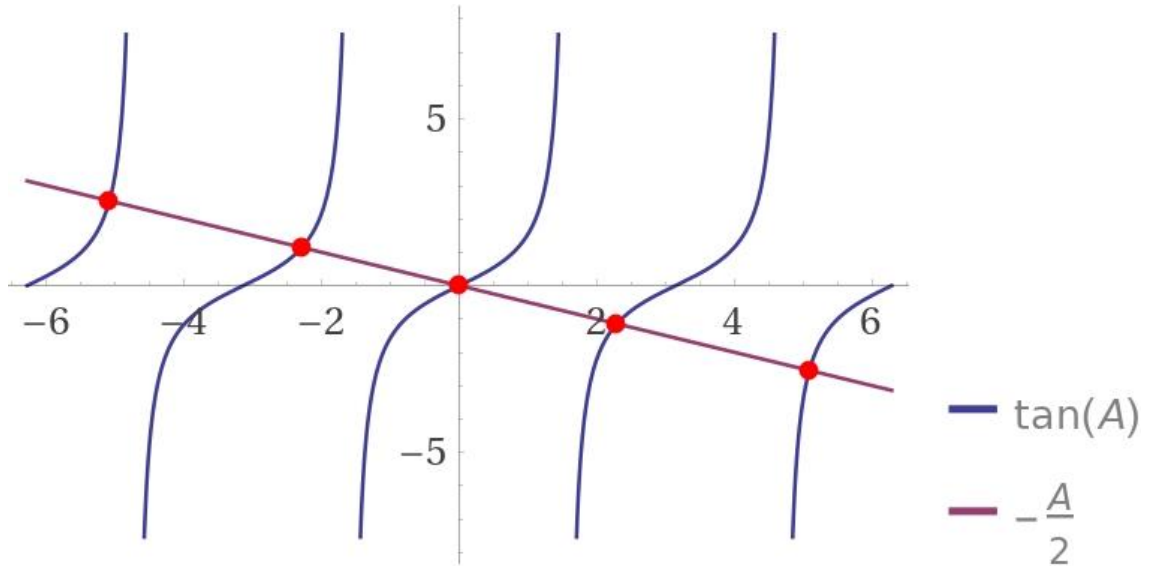
Şekil 9. Örnek 3 için ardışıklık özelliği

İç içe geçme özelliği $T_r(w)$ ve $T_i(w)$ için sağlandığı Şekil 9'daki grafikten görülmüştür. Teoremden de bahsedildiği gibi ardışıklık geçme özelliğinin sağlanması kararlılık için yeterli koşulu sağlamamaktadır. Bunun için $T_r(w)$ ve fonksiyonlarının gerçekliğini kanıtlamak gerekmektedir.

Bu durumu teyit etmek için Lemma kullanılabilir. Örnekte $T_i(w)$ fonksiyonunun köklerinin reelliği kontrol edilecektir. (30) denkleminin bir açılımı olarak (35) yazılırsa A yerine $0.3s$ koyarak tekrar yazılabilir:

$$\tan A = \frac{-1}{2}A \quad (35)$$

Bekleneceği üzere yukarıdaki denklemin kökleri (30) ile aynıdır. Köklerin yerleşimi hakkında daha geniş bir bakışı için Şekil 10. çizdirilmiştir.



Şekil 10. (35) denkleminin kökleri

Lemma da bahsedildiği gibi aşağıdaki aralıkta yeterli büyük l_0 için denklemin $4lp + n$ kadar kökü olmalıdır. Bu örnekte p ve n değerleri birdir.

$$-2l\pi + \beta \leq w \leq 2l\pi + \beta, \quad l = l_0, l_0 + 1, l_0 + 2 + \dots \quad (36)$$

β , $T^*(s)$ 'den gelen $w = \beta$ da kaybolmayan uygun sabittir. Bu örnek için bu terim $w \cos(0.3w)$ terimidir. Buna göre $T_i(jw)$ $l_0 = 1, l_0 = 2, l_0 = 3, ..$ için sırasıyla 5, 9, 13 kökü olmalıdır.

$T_i(jw)$ tek fonksiyon olduğu düşünülürse $l_0 = 1$ ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ için, $A \in \left(0, \frac{9\pi}{4}\right)$ ve $A \in \left(-\frac{7\pi}{4}, 0\right)$ aralıklarında ikişer kökü bulunmaktadır. $A=0$ için $T_i(w)$ 'nin bir kökü daha bulunmaktadır. $l_0 = 1$ için $T_i(w)$ 'nin sadece gerçel kökleri olduğu bulunmuştur. Bu durum diğer l_0 değerleri için de geçerlidir. Sonuç olarak sistemin 0.3s gecikmesi varken kararlı olduğu anlaşılmıştır.

Örnek 4.

Önceki örnekteki transfer fonksiyonunun zaman gecikmesi 10s olan versiyonu için kararlılık analizini yapınız.

$$G(s) = \frac{3}{s+2} e^{-10s} \quad (37)$$

Kapalı çevrim karakteristik denklemi aşağıdaki gibi olacaktır.

$$T(s) = s + 2 + 3e^{-10s} \quad (38)$$

$T(s)$ ile $e^{0.3s}$ ifadelerinin çarpımından elde edilen $T^*(s)$ aşağıdaki gibi gösterilmektedir.

$$T(s) = \frac{3}{s+2} e^{-10s} \quad (39)$$

A eşitliğinde s yerine jw koyulup imajiner ve reel parçalarına ayrılırsa,

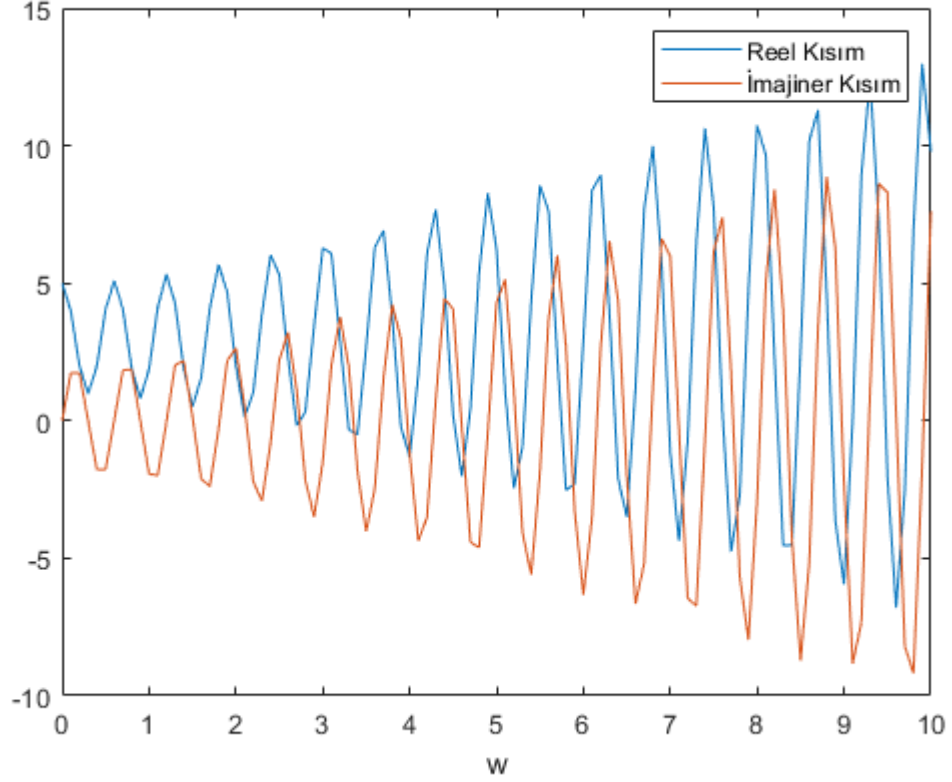
$$T_r(jw) = 3 + 2 \cos(10w) - w \sin(10w) \quad (40)$$

$$T_i(jw) = w \cos(10w) + 2 \sin(10w) \quad (41)$$

Teoremin şartlarından biri olan monotonik faz artışı $w_0 = 0$ için yazılacak olursa,

$$T'_i(0)T_r(0) - T'_r(0)T_i(0) = (20)(5) - (0)(0) > 0 \quad (42)$$

Diğer şart olan, $T_r(w)$ ve $T_i(w)$ fonksiyonlarının sadece gerçel köklerinin olduğunu tespit etmek için adımlardan biri olan ardışıklık özelliğini sonlu frekansa kadar tespit etmek faydalı olacaktır. Bu durumun tespiti için Şekil 11 çizilmiştir.



Şekil 11. Örnek 4 için ardışıklık özelliği

Şekil 11'deki grafikten de görüleceği üzere $T_r(w)$ ve $T_i(w)$ için ardışıklık geçme özelliği sağlanmaktadır. Bir önceki örnekten farkı sadece zaman gecikmesinin 10s olması olan bu örnekte kararlılığın sağlanamadığı görülmüştür.

2.2.3. Direkt Metot

Bu bölümde zaman gecikmeli sistemlerde Walton-Marshall'ın önermiş olduğu bir başka kararlılık yöntemi olan direkt metot açıklanacaktır. Hermite-Biehler teoremiyle karşılaştırıldığında bu yöntem tekil zaman gecikmeli sistemlerde kullanılır ve kararlılığı zaman gecikmesi terimi olan L 'ye bağlı olarak bulur.

L 'nin sıfırdan büyük olduğu durumlar için, tekil zaman gecikmeli, pay ve paydada ortak kökü olmayan bir sistem düşünelim.;

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} e^{-Ls} = \frac{n_m s^m + n_{m-1} s^{m-1} + n_{m-2} s^{m-2} \dots + n_1 s + n_0}{d_n s^n + d_{n-1} s^{n-1} + d_{n-2} s^{n-2} \dots + d_1 s + d_0} \quad (43)$$

Bu metodu şu adımları uygulayarak gerçekleştirebiliriz.

- (1) Kapalı çevrim sistemin kararlılığını zaman gecikmesi yokmuş gibi düşünerek bulunur. Ya da kapalı çevrim sistemin kutuplarının sol yarı düzlemde olup olmadığı kontrol edilir.
- (2) Sonsuz küçük L için, zaman gecikmesiz sisteme ek olarak sonsuz sayıda, sonsuzda olacak şekilde yeni kökler ortaya çıkacaktır. Bu adımda bu köklerin nerede ortaya çıktığı bulunacaktır.

i) $\deg N(s) > \deg D(s)$

Bu durum için sağ yarı düzlemde sonsuz yeni kök ortaya çıkacaktır. Bu durumda pozitif zaman gecikmeleri için sistem kararsız olacaktır.

ii) $\deg N(s) = \deg D(0)$

Bu durum için aşağıdaki şart sağlandığı müddetçe kapalı çevrim sisteminin yeni kökleri sol yarı düzlemde ortaya çıkar.

$$\frac{|d_n|}{|n_n|} > 1 \quad (44)$$

Sistem bazı L aralıkları için kararlı olabilir. Bu şart sağlanmadığı zaman pozitif zaman gecikmeleri için sistem kararsızdır.

iii) $\deg N(s) < \deg D(s)$

Bu durum için kapalı çevrim sisteminin yeni kökleri sağ yarı düzlemde ortaya çıkar ve sistem bazı L aralıkları için kararlı olabilir.

- (3) $L > 0$ için, eğer sistem imajiner ekseninde kutup çiftine sahipse şu eşitlik elde edilir:

$$e^{-j\omega L} = \frac{-D(j\omega)}{N(j\omega)} \quad (45)$$

Bu eşitliği sağlamak için alttaki şartları sağlamak yeterli olacaktır.

1.Şart

Buradan yola çıkarak aşağıdaki denklem yazılır.

$$\left| \frac{-D(jw)}{N(jw)} \right| = 1 \quad (46)$$

$$\sqrt{(-D(jw))(-D(-jw))} = \sqrt{(N(jw))(N(-jw))} \quad (47)$$

İki tarafın da kökü alınacak olursa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$W(w^2) = D(jw)D(-jw) - N(jw)N(-jw) = 0 \quad (48)$$

W polinomu sadece bir sıfırı için imajiner eksenle eşlenik köke sahiptir. Bunun da $\pm w_1$ için olacağını düşünürsek imajiner eksen eşlenik kökleri de $\pm jw_1$ noktalarında olacaktır.

İmajiner eksen üzerinden kutup geçişinin L zaman gecikmesi için hangi w_i için olacağını bulmak gereklidir. Bunu 2. Şartı sağlayarak bulabiliriz.

2.Şart

$$\begin{aligned} \cos(w_i L) &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{D(jw_i)}{N(jw_i)} \right\} \\ \sin(w_i L) &= \operatorname{Im} \left\{ \frac{D(jw_i)}{N(jw_i)} \right\} \end{aligned} \quad (49)$$

Bu iki denklemden L değerleri elde edilir. Bu iki denklem $+w_i$ ve $-w_i$ için aynı çıkacağından dolayı $-w_i$ hesaba katılmayacaktır.

Yukarıdaki bu iki denklemden de görüleceği üzere L, $\frac{2\pi}{w_i}$ periyodunda periyodiktir. En küçük L'ye L_{0_i} diyecek olursak, ilk L_{0_i} bulunduktan sonra buna bağlı olarak imajiner eksenden kutup geçişlerinin olduğu gecikme L_{k_i} terimi şu şekilde hesaplanabilir.

$$L_{k_i} = L_{0_i} + \frac{2k\pi}{w_i}, k = 1, 2, 3 \dots \quad (50)$$

$W(w^2)$ fonksiyonunun w_i değerleri ve bu frekanslara denk gelen L_{0_i} gecikme değerleri bulunduktan sonra her w_i frekansı için imajiner eksenden kutup çifti geçişlerinin hangi yöne olduğunun tespit edilmesi gereklidir. Bu geçiş sol yarı düzlemden sağ yarı düzleme ise bu geçiş kararlılığı ortadan kaldıracığından kararsız yapıcı, sağ yarı düzlemden sol yarı düzleme ise kararlılığı sağlayacağından dolayı kararlı yapıcı olarak

adlandırılır. Bu tespiti yapmak için kapalı çevrim karakteristik denkleminin L 'ye göre türevi alınarak bulunabilir.

Bu türev alındıktan sonra türevin reel kısmının işareti geçişin yönünü belirleyecektir.

$$\left(Re\left(\frac{ds}{dL}\right)\right)$$

Eğer;

$$i) \quad Re\left(\frac{ds}{dL}\right)_{s=jw_i} > 0$$

İfadenin işareti pozitifse kutup çifti geçişi sol yarı düzlemde sağ yarı düzlemde olur ve kararsız yapıcı olur.

$$ii) \quad Re\left(\frac{ds}{dL}\right)_{s=jw_i} < 0$$

İfadenin işareti negatifse kutup çifti geçişi sağ yarı düzlemde sol yarı düzlemde olur ve kararlı yapıcı olur.

$W(w^2)$ polinomunun birinci türevinin işaretinin $Re\left(\frac{ds}{dL}\right)_{s=jw_i}$ ifadesinin işaretine eşit olduğu Walton ve Marshall tarafından ispatlanmıştır.

Burada bahsedilmesi gereken kutup çiftinin geçiş yönü zaman gecikmesi teriminden bağımsız olduğudur.

Örnek 5.

Aşağıdaki sistemin kararlılık analizini Direkt Metot kullanarak yapınız.

$$G(s) = \frac{3}{s+2} e^{-Ls} \quad (51)$$

Bu metotta kararlılık analizi zaman gecikmeli terime bağlı olarak yapılabildiğinden Pade ve Hermite-Biehler örneklerindeki gibi sabit bir zaman gecikmesi verilmemiş, zaman gecikme süresi de parametre olarak bırakılmıştır.

Sistemin kapalı çevrim karakteristik denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$T(s, L) = s + 2 + 3e^{-sL} = 0 \quad (52)$$

Metod uygulanacak olursa

- 1) Zaman gecikmesiz durum($L=0$) için sistemin kararlı olduğu açıkça görülmektedir.
- 2) $D(s)$ in derecesi $N(s)$ in derecesinden büyük olduğu için, sistem bazı L değerleri için kararlıdır.
- 3) $W(w^2) = (-jw + 2)(jw + 2) - (3)(3) = w^2 - 5$ ve $W'(w^2) = 1$

$Re\left(\frac{ds}{dL}\right)_{s=j\sqrt{5}}$ ifadesinin işareti $[W'(w^2)]_{w^2=5}$ ifadesinin işareti ile aynı olduğundan ve bu işaret pozitif olduğundan $w = \pm\sqrt{5}$ noktalarından sağ yarı düzlemden sol yarı düzleme kararsızlığa sebep olacak kutup çifti geçişi olmaktadır.

$w = \sqrt{5}$ frekansına denk düşen L_0 zaman gecikmesinin bulunması için aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\cos(wL) = Re\left[\frac{-jw - 2}{3}\right] \quad (53)$$

$$\sin(wL) = Im\left[\frac{jw + 2}{3}\right] \quad (54)$$

w yerine $\sqrt{5}$ yazıldığı zaman,

$$\cos(\sqrt{5}L) = \frac{-2}{3} \quad (55)$$

$$\sin(\sqrt{5}L) = \frac{\sqrt{5}}{3} \quad (56)$$

Elde edilir.

Bu eşitlikler çözüldüğü zaman L_0 şu şekilde bulunur.

$$L_0 = 0,5183\pi \quad (57)$$

Bu L_0 değerine göre periyodik olarak kutup geçişi olan diğer L değerleri aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$L_k = L_0 + \frac{2k\pi}{w} = 0,5183\pi + k\frac{\pi}{2}, \quad k = 1,2,3 \dots \quad (58)$$

Zaman gecikmesiz sistemin kararlılık durumu L değeri $0,5183\pi$ ye çıkana kadar aynı kalacaktır. Zaman gecikmesiz sistem kararlı olduğu için L_0 değerine kadar sistem kararlı olacaktır. Bu değerden $1,7888\pi$ değerine kadar sistem kararsız olup sonra tekrar kararlı hale gelecektir. Bu şekilde periyodik bir şekilde zaman gecikme miktarına göre kararlılık aralıkları belirlenecektir. Sistemin kararlı olduğu aralıklar matematiksel bir şekilde aşağıda belirtilmiştir.

$$L \in \left(0,5183\pi + \frac{(k-1)\pi}{2}, 0,5183\pi + \frac{k\pi}{2} \right), k = 1,2,3 \dots \quad (59)$$

2.2.4. Nyquist Yöntemi

Zaman gecikmeli sistemlerde kararlılık analizi için kullanılan yöntemlerden biri de Nyquist teoremidir. Nyquist yöntemi açık çevrim transfer fonksiyonunu frekans tabanındaki yer eğrisinin tek giriş tek çıkışlı sistemin kararlı olup olmadığını kontrol eden grafiksel bir analiz yöntemidir. Nyquist teoremi frekans tabanında çalıştığı için zaman gecikmeli terim üzerinde çalışmak nispeten daha kolay olmaktadır.

Nyquist teoreminde analiz yapmak için aşağıdaki gibi bir transfer fonksiyonu düşünelim.

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} e^{-Ls} = \frac{n_m s^m + n_{m-1} s^{m-1} + n_{m-2} s^{m-2} \dots + n_1 s + n_0}{d_n s^n + d_{n-1} s^{n-1} + d_{n-2} s^{n-2} \dots + d_1 s + d_0} e^{-Ls} \quad (60)$$

Nyquist kararlılık kriteri kısaca şu şekilde açıklanabilir.

Kapalı çevrim sistem ancak ve ancak Nyquist eğrisinin $(-1, 0)$ noktasını çevreleme sayısı ile açık çevrim transfer fonksiyonun kararsız kutup sayısı ile eşit olduğu durumlarda kararlıdır.

Açık çevrim transfer fonksiyonunun kararsız herhangi bir kutbu yoksa kapalı çevrim sistem ancak ve ancak Nyquist eğrisi -1 noktasını çevrelemediği durumda kararlıdır.

Açık çevrim transfer fonksiyonunun S kadar kararsız kökü varsa kapalı çevrim sistem ancak ve ancak Nyquist eğrisi -1 noktasını N kadar çevrelediği (saat yönündeysen pozitif, saat yönünün tersine ise negatif) durumda kararlıdır.

Nyquist eğrisi -1 noktasının üzerinden geçiyorsa sistemin imajiner ekseninde kutbu vardır. Sistem asimptotik kararlıdır.

Buradan yola çıkarak yöntem için adımlar şu şekilde açıklanabilir.

- Açık çevrim transfer fonksiyonunun kararsız kutuplarını say(S).
- Nyquist eğrisini çiz.
- -1 noktasındaki saat yönünde çevreleme sayısını bul(N)
- Sistem $N=-S$ ise kararlıdır.

Bu prosedür zaman gecikmeli sistemlerde de kullanılabilir. Zaman gecikmeli bir sistem için Nyquist teoremi ile kararlılık analizi bir örnek ile açıklanacaktır.

Örnek 6.

Aşağıdaki sistemi kapalı çevrim kararlılığını sağlayacak tüm oransal kazanç aralığını hesaplayınız.

$$G(s) = \frac{3}{s+2} e^{-Ls}, K = P \quad (61)$$

(61)'de verilen denklemde s yerine jw yazılınca,

$$\frac{3K}{jw+2} e^{-0,3jw} \quad (62)$$

ifadesi elde edilir. Euler denklemleri kullanılarak zaman gecikmeli kısım aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{3K}{jw+2} (\cos(0,3w) - j\sin(0,3w)) \quad (63)$$

Paydayı imajiner terimden kurtarıp aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\frac{3K}{w^2+4} (-jw\cos(0,3w) - w\sin(0,3w) + 2\cos(0,3w) - 2j(\sin(0,3w))) \quad (64)$$

Kararlılık için w_{krt} kritik frekansını imajiner kısmı sıfıra eşitleyerek bulalım.

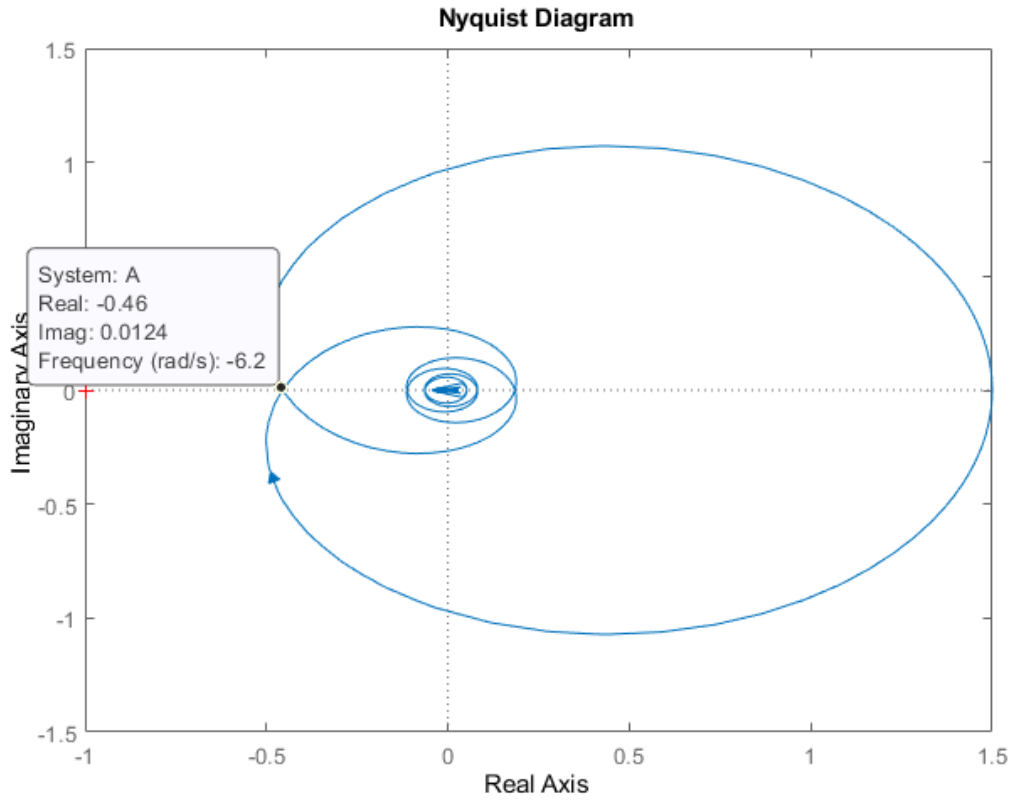
$$-jw\cos(0,3w) - 2j(\sin(0,3w)) = 0 \quad (65)$$

$$w = -2 \tan(0,3w)$$

En küçük pozitif değer için çözülürse kritik frekans şöyle bulunur.

$$w_{krt} \approx 6,26 \text{ rad/s} \quad (66)$$

Bu kritik frekansı Şekil 12'deki Nyquist eğrisi üzerinden de görebiliriz.



Şekil 12. Örnek 6'nın Nyquist Diagramı

Sistemde kritik frekansı yerine koyarsak aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\frac{3K}{6,26^2 + 4} [-j6,26 \cos(0,3 * 6,26) - 6,26 \sin(0,3 * 6,26) + 2 \cos(0,3 * 6,26) - 2j \sin(0,3 * 6,26)] \quad (67)$$

$$G(j6,26) = K(-0,46)$$

Kritik kazancı bulmak için kritik frekans anındaki değeri -1'e eşitliyoruz.

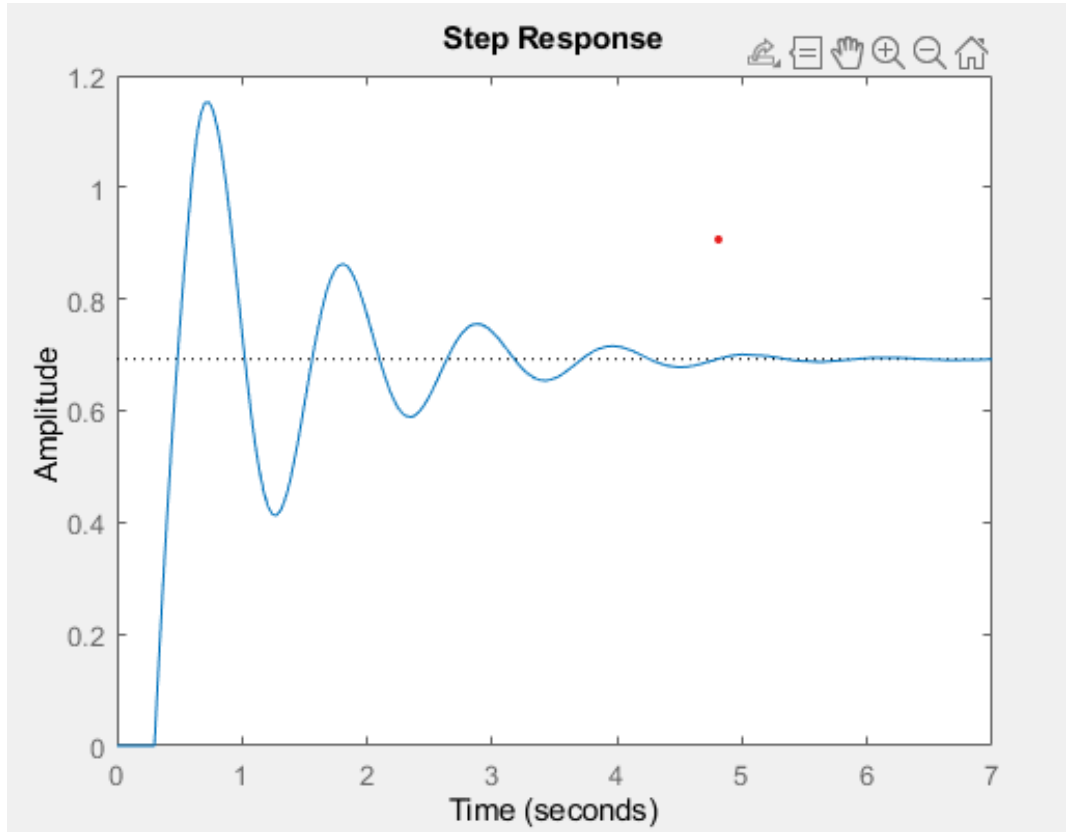
$$G(j6,26) = -1$$

$$-1 = K(-0,46), K_{krt} = 2,22 \quad (68)$$

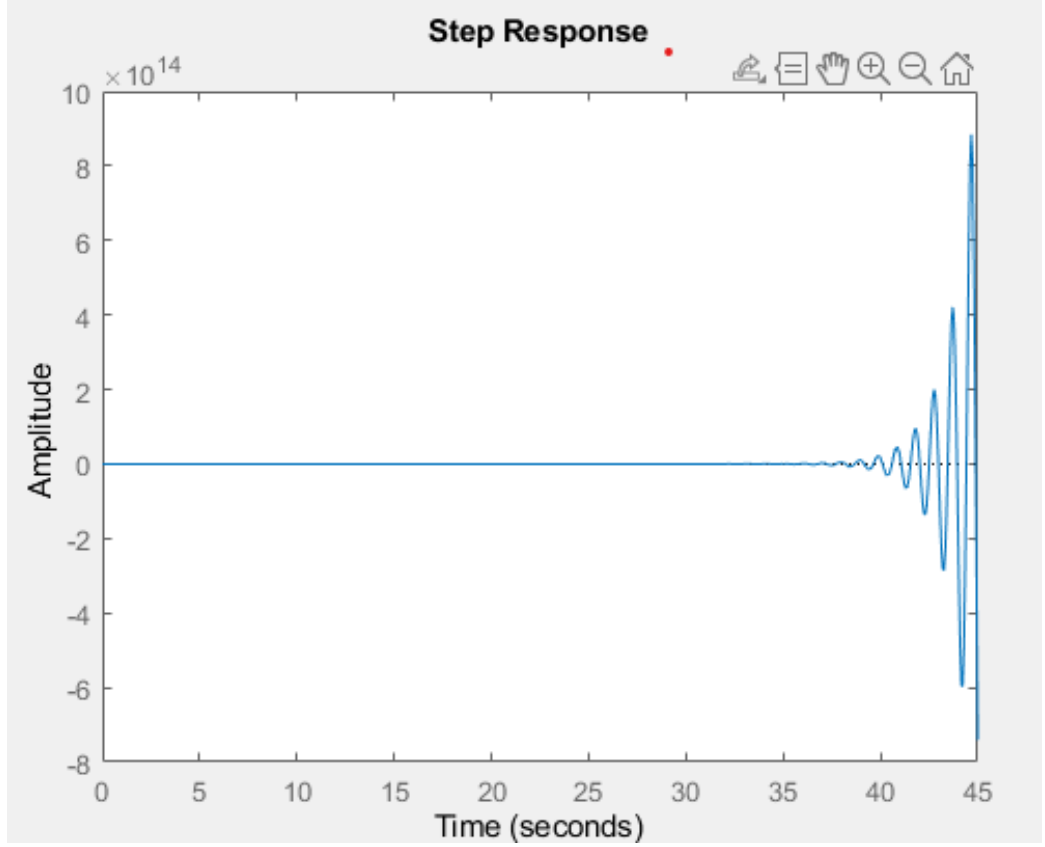
Bu eşitliğin anlamını Nyquist teoreminden yola çıkarak açıklayabiliriz. Eğer kazanç değeri 2,22'den büyük olursa Nyquist eğrisi (-1, 0) noktasını çevreleyecek ve sistem kararsız hale gelecektir. Sistemi kararlı hale getiren K değerlerini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$0 < K < 2,22 \quad (69)$$

Yöntemin doğruluğunu test etmek için K değerini 1,5 ve 3 seçerek birim basamak cevaplarını Şekil 13 ve Şekil 14'te çizdiriyoruz.



Şekil 13. Örnek 6'nın K=1,5 için birim basamak cevabı



Şekil 14. Örnek 6'nın $K = 3$ için birim basamak cevabı

Görüldüğü üzere kazanç değeri 1,5 iken sistem kararlı durumda, kazanç değeri 3'e çıkarıldığında ise sistem kararsızlığa gitmektedir.

3. BASKIN KUTUP YERLEŞİMİ

Kapalı çevrim cevabına performans gereksinimlerini sağlayabilecek iki eşlenik kök yerleştirerek diğer tüm tüm kutupların kontrolcü performansı üzerindeki etkisini ihmal etmeye çalışılan yönteme baskın kutup yerleşimi adı verilir. Baskın kutup yerleşiminin, keyfi kutup yerleşimine göre en temel farkı baskın iki kutup dışındaki kutupları belirli lokasyonlara yerleştirmesidir. Ama diğer kutupların baskın kutuplardan imajiner eksene göre belirli bir kat kadar solda olduğundan emin olur.

Düşük mertebeli kontrolörler yapılarının kolaylığı ve geniş kullanım alanının devam etmesiyle halen popüler olmaya devam etmektedir. Kontrolörler elektronik bileşenlerle oluşturulduğu zaman faz ileri-geri kontrolör yapıları pratikte sıkça rastlanmaktadır (Goodwin vd., 2001). Faz ileri kontrolörler sıklıkla integral etkisine sahip olan sistemlerde kullanılırlar. Servo mekanizması gibi integral etkisi olan sistemlerde PID kontrolcüler ile karşılaştırıldığında faz ileri kontrolörler sistem üzerinde daha iyi bir alçak geçiren filtre etkisine sahiptirler (Boz, 1999; Tan, 2003).

Faz ileri-geri kontrolcüyle zaman gecikmeli ve zaman gecikmesiz sistemler için faz ileri-geri kontrolcü ile baskın kutup yerleşimi ayrı ayrı örneklerle açıklanacaktır.

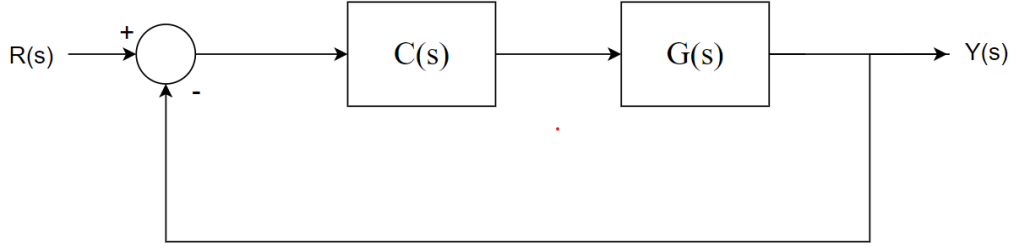
3.1. Zaman Gecikmesiz Sistemler İçin Baskın Kutup Yerleşimi

Aşağıdaki transfer fonksiyonu ile belirtilen sistemi düşünelim.

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (70)$$

Aşağıdaki faz ileri-geri kontrolcü yapısı kullanılarak Şekil 15'teki gibi geri beslemeli sistemdeki gibi kontrol edilecektir.

$$C(s) = \frac{K(s + z)}{s + p} \quad (71)$$



Şekil 15. 3.1 ve 3.2’de kullanılacak kontrol sistemi

Şekil 15’teki sistemin kapalı çevrimin karakteristik denklemi (88)’deki eşitlikte gösterilmiştir.

$$1 + C(s)G(s) = 0 \quad (72)$$

Kapalı çevrim transfer fonksiyonu da aşağıdaki gibidir.

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{N(s)(K(s+z))}{D(s)(s+p) + N(s)K(s+z)} \quad (73)$$

Kapalı çevrim kontrol performansı ve isterlerini karşılama problemini Astrom, yaptığı çalışmayla eşlenik kutup ($p_{1,2} = -a \pm bj$) atamaya indirger (Astrom, 1995). Bu baskınlığın şartı atanılan kutuplar dışındaki diğer tüm kutupların $-a$ ’dan m kat kadar uzak olmasıdır. Bu m genelde üç ile beş arasındır. Buradan yola çıkarak $s=-ma$ doğrusunun soluna istenen bölge dersek, baskın kutuplar dışındaki tüm kutuplar bu bölgeye atılırsa ve bu atama faz ileri-geri kontrolcüsü ile yapılırsa faz ileri-geri kontrolcü ile baskın kutup yerleşimi tamamlanmış olur.

Bu görev için gerekli adımlar açıklanacaktır. (72)’ deki denkleme s yerine $p_1 = -a + bj$ yazılacak olursa aşağıdaki gibi bir karmaşık denklem elde edilir.

$$\frac{K(-a + bj + z)}{-a + bj + p} = -\frac{1}{G(p_1)} \quad (74)$$

Bilindiği gibi karmaşık denklemler reel ve imajiner kısımlar ayrılarak iki ayrı denklem halinde yazılabilir.

$$X = Im \left[\frac{-1}{G(p_1)} \right], Y = Re \left[\frac{-1}{G(p_1)} \right] \quad (75)$$

Bu varsayımlardan sonra p ve z parametreleri K 'ye göre yazılacak olursa (76)'da yazılan denklemler ortaya çıkar.

$$\begin{aligned} z &= \frac{-Xb}{K} + \frac{Yb}{K} - \frac{Y^2b}{XK} + a \\ p &= \frac{Kb}{X} + a - \frac{Yb}{X} \end{aligned} \quad (76)$$

Bu denklemlerle problem tek parametrelili bir probleme dönüşmektedir. Kök eğrisi ve Nyquist eğrisi uygulamaları rahatça yapılabilir.

Kök eğrisi yöntemi karakteristik denklemin sistemin tüm parametrelerine göre köklerin hareketini inceler. Kapalı çevrim karakteristik denkleminde kök eğrisini çizdirerek oransal kazançların hangi aralıklarda baskın kutuplar harici kutupların istenilen bölgede olduğu çizdirilerek görülecektir. (76)'yı (72)'e yerleştirip K içeren terimleri ayırırsak,

$$\begin{aligned} sD(s) + aD(s) - \frac{YD(s)b}{X} - N(s)Xb - N(s)\frac{Y^2}{X} \\ + K\left(\frac{D(s)b}{Y} + N(s)s + \frac{N(s)sY}{X} + N(s)a\right) \end{aligned} \quad (77)$$

elde edilir. İki tarafı da K ile bölersek denklem kök eğrisi formuna gelecektir.

$$1 + KG^r(s) = 0 \quad (78)$$

$G^r(s)$ 'i de aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$G^r(s) = \frac{\frac{D(s)b}{Y} + N(s)s + \frac{N(s)sY}{X} + N(s)a}{D(s) + aD(s) - \frac{YD(s)b}{X} - N(s)Xb - N(s)\frac{Y^2}{X}} \quad (79)$$

(79)'dan da görüleceği üzere $G^r(s)$ kök eğrisi çizmek için uygun bir transfer fonksiyonudur. Verilecek örnekle konunun pekiştirilmesi yapılacaktır.

Örnek 7

Dördüncü dereceden bir sistem düşünelim (Q. G. Wang vd., 2009).

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s+5)^2} \quad (80)$$

Sistemin aşımı(OS) %5ten az olup, yükselme zamanı da 3s az olması istenirse buna karşılık gelen baskın kutuplar $p_{1,2} = -0,61 \pm 0,64j$ olarak seçilebilir.

(76) denklemini aşağıdaki hali alır.

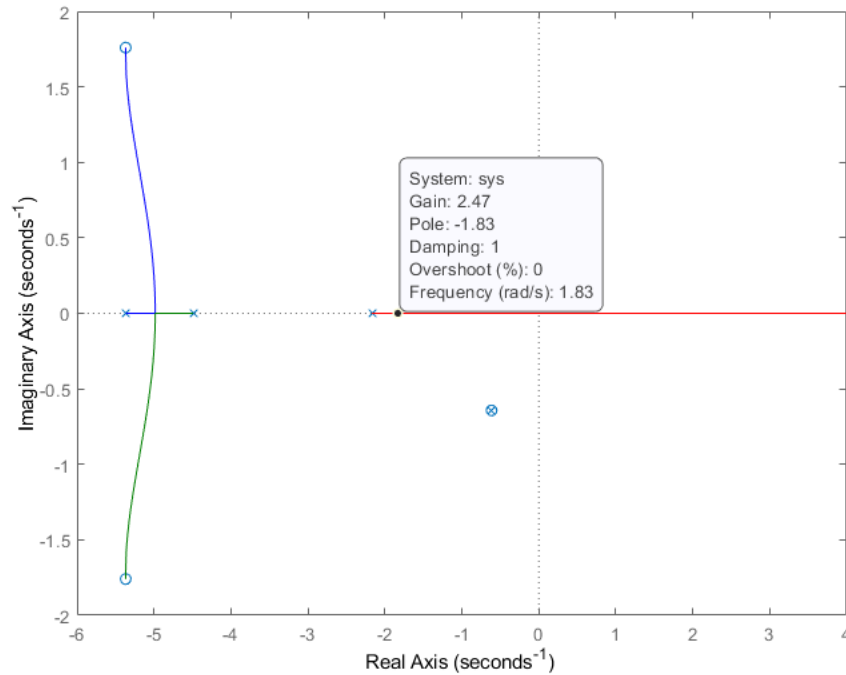
$$z = \frac{10,4}{K} - 0,04 \quad (81)$$

$$p = 1,26 - 0,08K$$

Örnek 7'deki $G^r(s)$ ise aşağıdaki gibi bulunur.

$$G^r(s) = \frac{-0,08s^4 - 0,97s^3 - 3,73s^2 - 3,87s - 2,066}{s^5 + 13,26s^4 + 61,1s^3 + 117,9s^2 + 100,5s + 44,63} \quad (82)$$

(82)'deki denklemden görülen $G^r(s)$ gibi beşinci dereceden bir transfer fonksiyonudur ve kök eğrisinde köklerden ikisi baskın kutupların üzerinde sabittir, iki tanesi sistemin diğer iki sıfırına giderken kalan kutup da pozitif sonsuza gitmektedir. K değeri 0'da iken baskın kutup harici diğer kutuplar $s=-ma$ doğrusunun solunda yani istenen bölgede bulunmaktadır. K değeri 2,47'ya çıkana kadar bu durum devam ederken 2,47'den sonra $s=-ma$ doğrusunun sağına kök geçmeye başlayacaktır. Garantilenmiş kutup yerleşimi bu değerden sonra geçerli olmayacaktır. Bu durum aşağıda gösterilen Şekil (16)'dan da görülebilir.



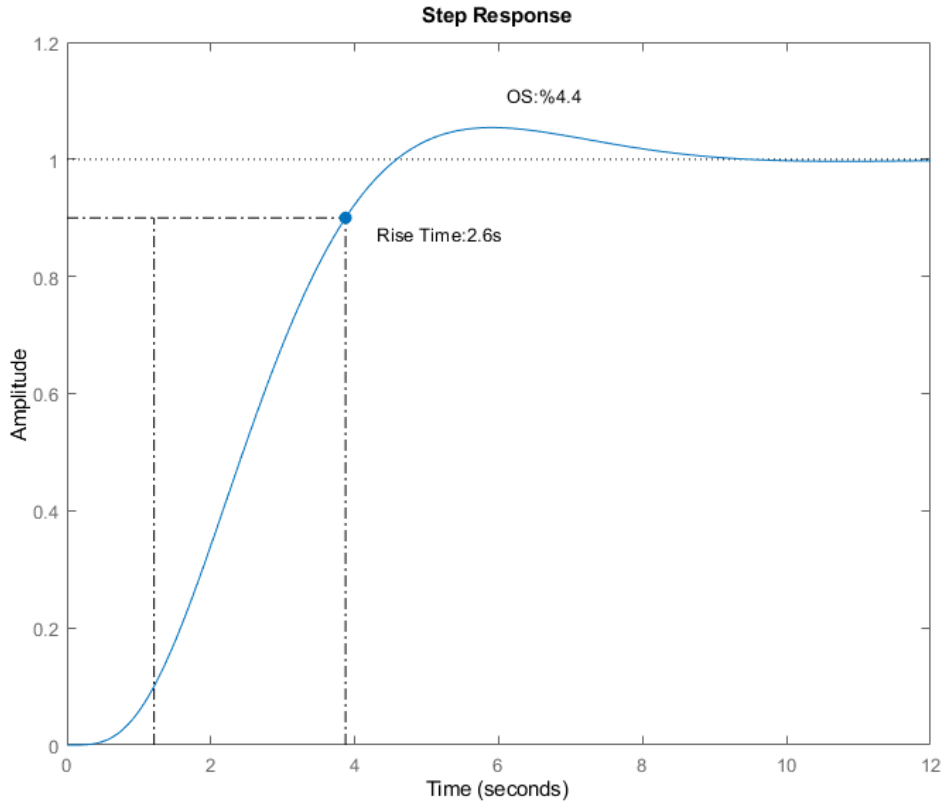
Şekil 16. Örnek 7'nin kök-yer eğrisi

Baskın kutup yerleşimini sağlayan $0 < K < 2,47$ aralığıdır.

$K=1$ seçilecek olursa ortaya çıkan faz geri kontrolcü (83)'deki gibi olur.

$$C(s) = \frac{s + 10,36}{s + 1,18} \quad (83)$$

Kapalı çevrim sistemin adım cevabı çizdirilecek olursa aşağıdaki gibi olur. Grafikten de görüleceği üzere kontrolcü kullanılarak istenen şartlar sağlanmış olur.



Şekil 17. Örnek 7'deki sisteme faz geri kontrolcü uygulandığında oluşan birim basamak cevabı

Şekil 17'de görüldüğü üzere yükselme zamanı 2.6s, aşım ise %4.4 olarak bulunmuş, performans kriterleri sağlanmıştır.

3.2. Zaman Gecikmeli Sistemler İçin Baskın Kutup Yerleşimi

(70)'deki denklemde $G(s)$ 'te zaman gecikmesi varsa $G^r(s)$ 'te de olacaktır. (70) ve (79) denklemlerinde zaman gecikmesinin eklenmesi ile sırasıyla aşağıda gösterildiği üzere (84) ve (85) denklemlerindeki hale gelir.

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} e^{-Ls} \quad (84)$$

$$G^r(s) = \frac{\frac{D(s)b}{Y} + e^{-sL}(N(s)s + \frac{N(s)sY}{X} + N(s)a)}{D(s) + aD(s) - \frac{YD(s)b}{X} + e^{-sL}(-N(s)Xb - N(s)\frac{Y^2}{X})} \quad (85)$$

Bu durumda kök-yer eğrisini çizmek ve sonsuz kutupların konumlarını belirlemeye çalışmak imkânsız olacaktır. Tezin önceki bölümlerinde de anlatıldığı gibi Nyquist teoremi zaman gecikmeli sistemlerde de kullanılabilir. Nyquist eğrisi açık çevrim sistemden yola çıkarak kapalı çevrim kutupların kararlılığını kontrol eden bir yöntemdir. Burada da aynı yöntem kullanılacaktır, fakat klasik Nyquist eğrisini *ma* kadar sola kaydırarak Düzenlenmiş Nyquist eğrisi elde edilecektir. İstenilen bölge dışındaki kutup sayıları normal Nyquist'teki kararsız kutuplarla aynı anlamı ifade etmektedir.

$$\frac{1}{K} + G^r(s) = 0 \quad (86)$$

Bu ifade doğal olarak $p_{1,2}$ köklerini barındırır. Bu kökler istenen alan dışındadır. Bu iki kök dışındaki diğer kökler baskın kutup yerleşimini sağlamak için istenilen alanda olmalıdır. Bu şartı sağlamak demek $G^r(s)$ düzenlenmiş Nyquist eğrisinin $(-\frac{1}{K}, 0)$ noktasını saat yönünde çevreleme sayısının $G^r(s)$ 'in istenilen alan dışındaki kök sayısının 2'den çıkarılması ile elde edilen sayının birbirine eşit olmasıyla aynı anlama gelmek demektir.

$G^r(s)$ 'in istenilen alan dışındaki kökleri kendi paydasının kökleridir. Fakat paydada zaman gecikmeli terimler bulunduğu için paydadadan farklı bir karakteristik denklem (87) ortaya çıkmaktadır.

$$1 + G_0^r(s) = 0 \quad (87)$$

$G_0^r(s)$ 'da aşağıdaki gibi yazılır.

$$G_0^r(s) = \frac{N(s)[-Xb - \frac{Y^2}{X}]e^{-sL}}{D(s)[s + a - \frac{Yb}{X}]} \quad (88)$$

Literatürdeki yapılan çalışmada olduğu gibi (Q. G. Wang vd., 2009), kontrolcü tasarımını yapmak için aşağıdaki adımlar kullanılabilir. $G_0^r(s)$, kendi rasyonel pay ve paydasının dereceleri açık döngü transfer fonksiyonun sırasıyla pay ve paydasının derecesiyle eşittir. (87)'nin kökleri, yani $G^r(s)$ 'nin istenen bölge dışındaki kutuplarının sayısı, $G_0^r(s)$ 'nin (-1,0) noktasını Nyquist eğrisinin saat yönündeki çevreleme sayısı ile $G_0^r(s)$ 'nin istenen bölge dışındaki kutupların sayısının toplamına eşittir.

Kontrolcü tasarımı için algoritmayı şu şekilde özetleyebiliriz.

- i. $G_0^r(s)$ 'nin istenen bölge dışındaki kutupların sayısını bul ve sayıyı şu şekilde isimlendir, $P_{G_0^r}$;
- ii. $G_0^r(s)$ için düzenlenmiş Nyquist eğrisini çiz. (-1, 0) noktasına göre saat yönündeki çevreleme sayısını hesapla ve bu sayıyı $N_{G_0^r}$ olarak adlandır.
- iii. $G^r(s)$ 'nin istenen bölge dışındaki kutupların sayısını hesapla, $P_{G^r} = P_{G_0^r} + N_{G_0^r}$
- iv. $G^r(s)$ için düzenlenmiş Nyquist eğrisini çiz. $(\frac{-1}{K}, 0)$ noktasına göre saat yönündeki çevreleme sayısının $2 - P_{G^r}$ değerine eşit olduğu K aralıklarını bul.

Bu tezde zaman gecikmeli sistemlerde kutup yerleşimi için $G_0^r(s)$ transfer fonksiyonunun analizi 2.2.3'de verilen Direkt metotla yapılacaktır. $G_0^r(s)$ transfer fonksiyonu için kutup geçişi olup olmadığı, varsa hangi L değeri için olduğuna göre P_{G^r} sayısı bulunabilir. Kontrolcü tasarımı aşağıdaki adımlar kullanılarak gerçekleştirilebilir.

- i. $G_0^r(s)$ 'nin istenen bölge dışındaki kutupların sayısını bul ve sayıyı şu şekilde isimlendir, $P_{G_0^r}$;

- ii. $G_0^r(s)$ için Direkt metodu uygula, sistem L'sinden daha küçük L değerleri için kutup geçiş miktarını geçiş yönüne göre(sağ yarı düzlemde sol yarı düzlemde geçişte pozitif, sol yarı düzlemde sol yarı düzlemde geçişte negatif olacak şekilde) hesapla ve bu sayıyı $D_{G_0^r}$ olarak isimlendir ;
- iii. $G^r(s)$ 'nin istenen bölge dışındaki kutupların sayısını hesapla, $P_{G^r} = P_{G_0^r} + D_{G_0^r}$
- iv. $G^r(s)$ için düzenlenmiş Nyquist eğrisini çiz. $(\frac{-1}{K}, 0)$ noktasına göre saat yönündeki çevreleme sayısının $2-P_{G^r}$ değerine eşit olduğu K aralıklarını bul.

Örnek 8

Aşağıdaki sistemi düşünelim(Q. G. Wang vd., 2009).

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 5} e^{-0.1s} \quad (89)$$

Aşımın(%OS) %10'dan az ve oturma zamanının 12 saniyeden az olması istenirse baskın kutuplar, $p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ eşitliği kullanılarak $p_{1,2} = -0,3 \pm 0,4j$ seçilebilir. Burada m'yi 3 aldığımızda $m_a=0,9$ olacaktır.

Düzenlenmiş $G_0^r(s)$ aşağıdaki gibi olmaktadır.

$$G_0^r(s) = \frac{26.421}{s^3 - 6.756s^2 + 9.675s - 29.244} e^{-0.1s} \quad (90)$$

$G_0^r(s)$ transfer fonksiyonlarının kutuplarının yeri aşağıdaki gibi bulunabilir.

$$s_{1,2,3} = 0.4 \mp 2.18j, 5.96 \quad (91)$$

Bu durumda istenen bölge dışındaki kutup sayısı, yani $P_{G_0^r} = 3$ olacaktır.

$G_0^r(s)$ transfer fonksiyonuna Direkt metot uygulanacak olursa $\deg(N(s)) < \deg(D(s))$ olmasından dolayı kapalı çevrim sisteminin yeni kökleri sağ yarı düzlemde ortaya çıkar ve sistemde bazı L aralıkları için sağ yarı düzlemde sol yarı düzlemde kutup geçişleri olabilir.

$G_0^r(s)$ için $W(w^2)$ polinomu (48) denklemini kullanarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$w^6 + 26.29w^4 - 301.55w^2 + 157.15 \quad (92)$$

w^2 'nin köklerini aşağıdaki gibi bulabiliriz.

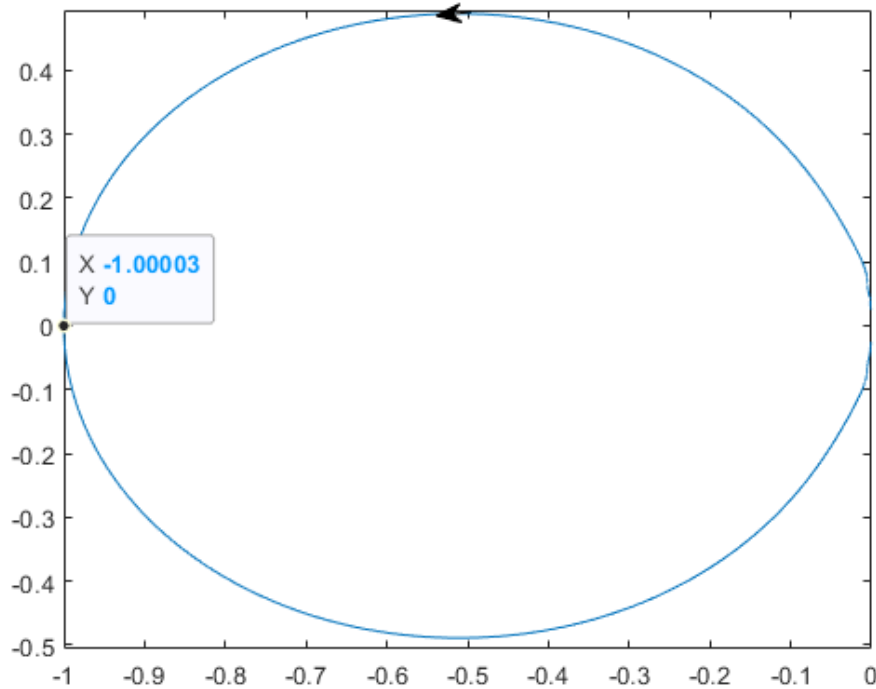
$$w_{1,2,3,4,5,6} = -2.86, -0.74, \mp 5.92j, 0.74, 2.86 \quad (93)$$

Yukarıdan da görülebileceği üzere w' 'nin 2 adet pozitif gerçel kökü bulunmaktadır. Bunun anlamı da belirli L değerleri için geçiş olabileceğidir. (53) ve (54) denklemleri kullanılarak, L=0.349, 1.04 değerleri için ilk kutup geçişleri meydana gelmektedir. Sistem gecikmesinin 0.1s olduğundan dolayı kutup geçişi bu sistem için olmayacaktır. Kutup geçişinin sıfır olması ile aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$P_{Gr} = P_{G_0^r} + D_{G_0^r} = 3 + 0 = 3 \quad (94)$$

$2-P_{Gr}$ değeri açıkça görüldüğü üzere -1 olmaktadır. Bu da (95) denkleminde belirtilen $G^r(s)$ için düzenlenmiş Nyquist eğrisinin saat yönünün tersinde bir kez çevrelediği K değerlerini bulmamız gerektiği anlamına gelmektedir.

$$G^r(s) = \frac{-5.86 + 5.2e^{-0.1s} + 0.95s + 1.1e^{-0.1s}s - 1.2s^2}{-29.24 + 26.4e^{-0.1s} + 9.7s - 6.76s^2 + s^3} \quad (95)$$



Şekil 18. (95) için düzenlenmiş Nyquist eğrisi

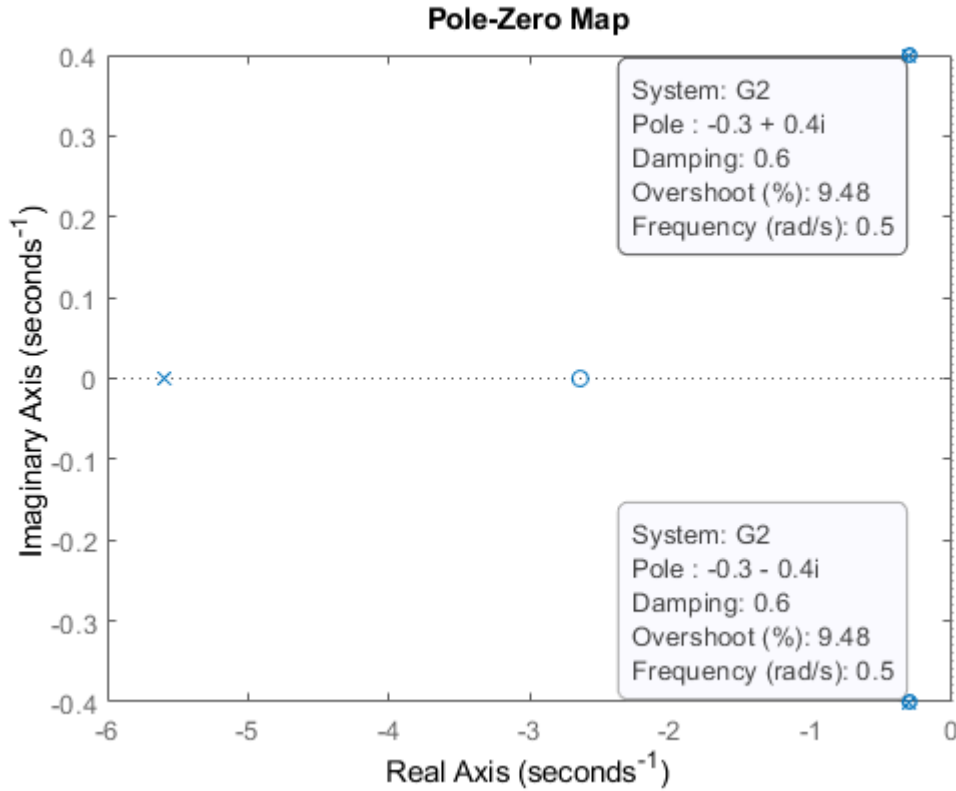
Şekilde $K = -4.266$ için düzenlenmiş Nyquist eğrisi görülmektedir. $K = (-\infty, -4.266)$ aralığı için düzenlenmiş Nyquist eğrisi -1'i saat yönünün tersinde çevrelemektedir.

$K = -8$ seçilip sisteme aşağıdaki oluşan faz ileri kontrolcü uygulanırsa,

$$C(s) = \frac{-8s - 21.1}{s + 4.501}, 1 + C(s)G(s) = 0 \quad (96)$$

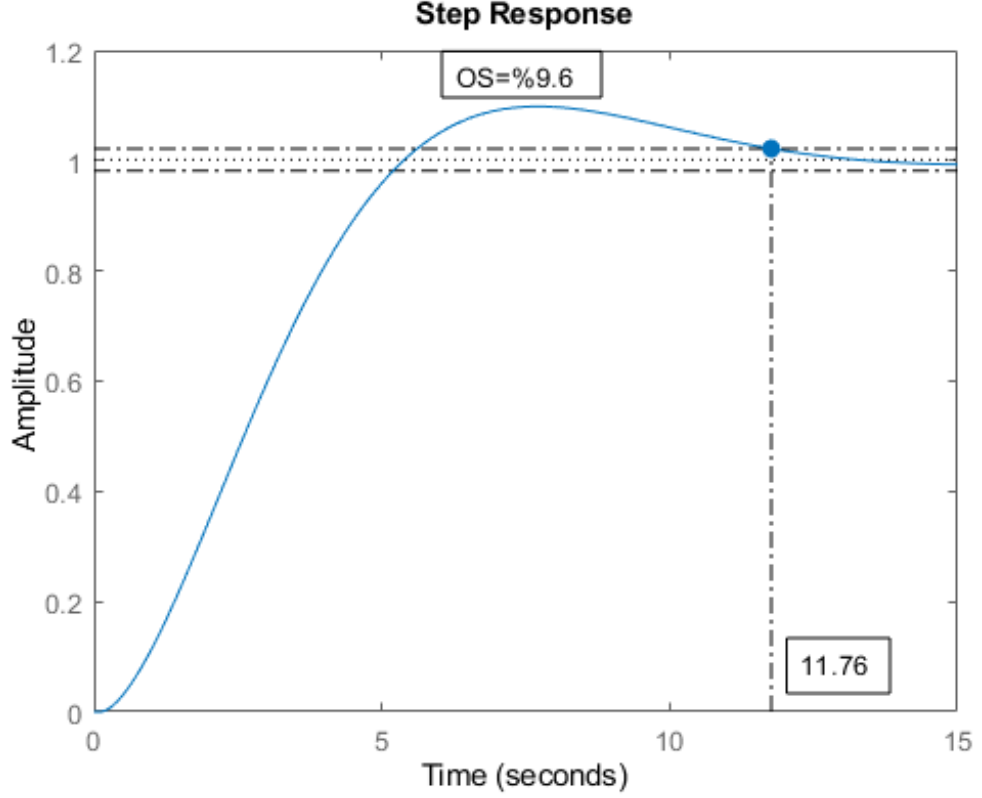
Kapalı çevrim transfer fonksiyonun karakteristik polinomunu baskın köklerin sıfır yaptığı kontrolcü yerine konulduğunda $1 + C(s)G(s)$ ifadesinin sıfır olduğu sağlanmıştır.

Ayrıca seçilen baskın kutupların Şekil 19'dan da görüldüğü gibi yerine oturacağı görülmüştür.



Şekil 19. Faz ileri kontrolcü kullanıldığında oluşan sıfır-kutup haritası

Sisteme birim basamak uygulayacak olursak aşağıdaki gibi bir cevap verecektir.



Şekil 20. Faz ileri kontrolcü uygulandığında Örnek 8'in birim basamak cevabı
 Şekil 20'den de anlaşılacağı üzere şartlar sağlanmış, oturma zamanı 11.76s aşım da %9.6 olarak elde edilmiştir.

Örnek 9

Örnek 8'deki sistemi aşımın(%OS) %2'den az olacak şekilde ve oturma zamanının 2.5s'den az olacak şekilde tasarlayınız. Bu performans kriterlerini sağlamak için şu baskın kutuplar seçilmiştir: $p_{1,2} = -1,5 \pm 1,2j$. $m=3$ alınmıştır.

Düzenlenmiş $G_0^r(s)$ aşağıdaki gibi olmaktadır.

$$G_0^r(s) = \frac{-21,1167}{s^3 - 8,065s^2 + 21,267s - 1,34} e^{-0,1s} \quad (97)$$

$G_0^r(s)$ transfer fonksiyonlarının kutuplarının yeri aşağıdaki gibi bulunabilir.

$$s_{1,2,3} = 4 \mp 2.18j, 0.065 \quad (98)$$

$G_0^r(s)$ transfer fonksiyonuna Direkt metot uygulanacak olursa $\deg(N(s)) < \deg(D(s))$ olmasından dolayı kapalı çevrim sisteminin yeni kökleri s yarı düzlemde ortaya çıkar ve sistemde bazı L aralıkları için sağ yarı düzlemde sol yarı düzleme kutup geçişleri olabilir.

$G_0^r(s)$ için $W(w^2)$ polinomu aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$w^6 + 22.5w^4 + 430.657w^2 - 444.115 \quad (99)$$

w'nin köklerini aşağıdaki gibi bulabiliriz.

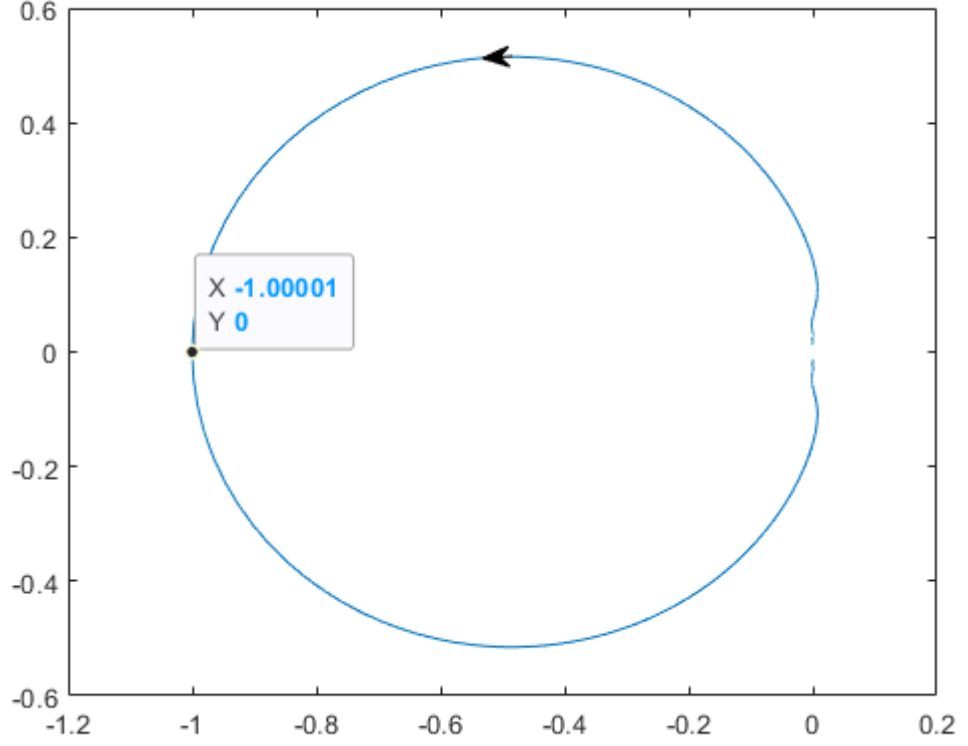
$$w_{1,2,3,4,5,6} = -2.18 \mp 4.064j, 2.186 \mp 4.06j, -0.989, 0.989 \quad (100)$$

Yukarıdan da görülebileceği üzere w'nin bir adet pozitif gerçel kökü bulunmaktadır. 0.989 olan bu kök için L=5.08s değerinde ilk kutup çifti geçişi olduğu tespit edilebilir. Bu L değeri sistem L değeri olan 0.1'den daha büyük olduğu için $D_{G_0^r} = 0$ olmaktadır. Bu durumda aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$P_{G^r} = P_{G_0^r} + D_{G_0^r} = 3 + 0 = 3 \quad (101)$$

$2-P_{G^r}$ değeri açıkça görüldüğü üzere -1 olmaktadır. Bu da $G^r(s)$ için düzenlenmiş Nyquist eğrisinin saat yönünün tersinde bir kez çevrelediği K değerlerini bulmamız gerektiği anlamına gelmektedir.

$$G^r(s) = \frac{15.5 - 9.3e^{-0.1s} + 5.97s + 1.57e^{-0.1s}s - 0.75s^2}{-1.34 + 21.1167e^{-0.1s} + 21.27s - 8.05s^2 + s^3} \quad (102)$$



Şekil 21. (102) için düzenlenmiş Nyquist Eğrisi

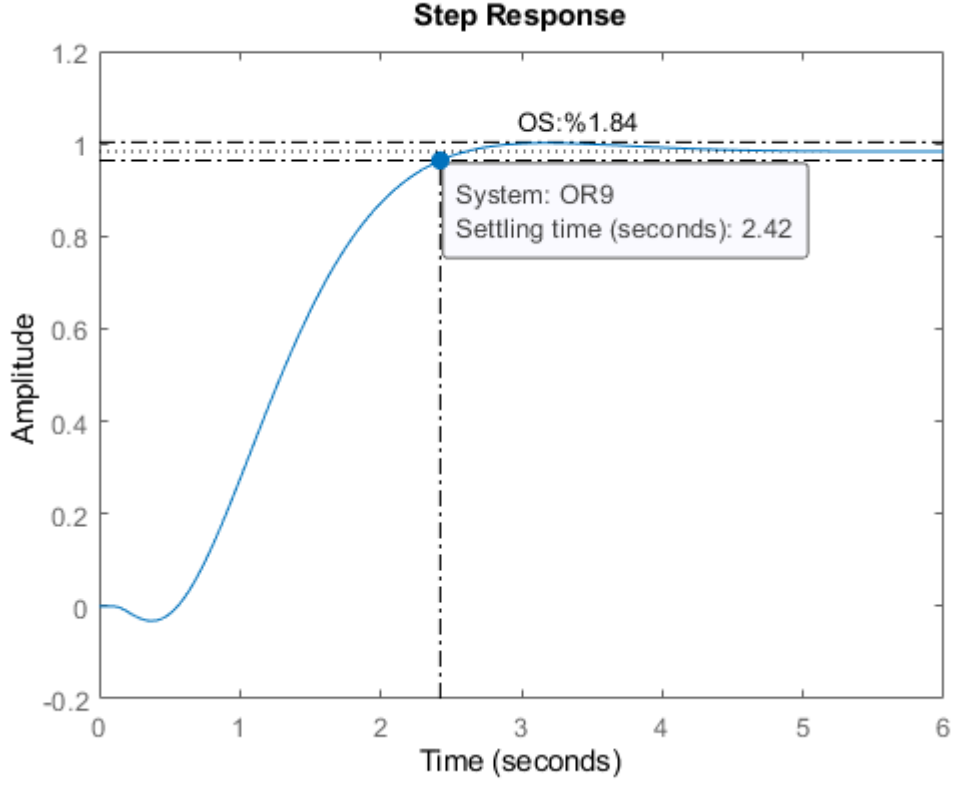
Şekil (21)'de $K = 3.6291$ için düzenlenmiş Nyquist eğrisi görülmektedir. $K = (3.6921, \infty)$ aralığı için düzenlenmiş Nyquist eğrisi -1'i saat yönünün tersinde çevrelemektedir.

$K= 4$ seçilip sisteme (103)'te oluşan faz-ileri kontrolcü uygulanırsa,

$$C(s) = \frac{4s - 19.21}{s + 7.423} \quad (103)$$

Kapalı çevrim transfer fonksiyonun karakteristik polinomunu baskın köklerin sıfır yaptığı sağlanmıştır.

Sisteme birim basamak uygulayacak olursak aşağıdaki gibi bir cevap verecektir. Kontrolcünün doğasından kaynaklanan kalıcı hal hatası girişe gerekli oranlar uygulanarak giderilmiştir.



Şekil 22. Faz ileri kontrolcü uygulandığında Örnek 9'un birim basamak cevabı
Şekil 22'de de görüldüğü üzere şartlar sağlanmış olup oturma zamanı 2.42s aşım ise %1.84 olarak elde edilmiştir.

Örnek 10

Aşağıdaki sistemi düşünelim.

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 4} e^{-0.2s} \quad (104)$$

Aşımın(%OS) %3'ten az ve oturma zamanının 6 saniyeden az olması istenirse baskın kutuplar $p_{1,2} = -0,8 \pm 0,6j$ seçilebilir. Burada m'yi 5 aldığımızda ma=4 olacaktır. Yani baskın kutup dışındaki kutupları -4'ten daha sola atmamız gerekmektedir.

Düzenlenmiş $G_0^r(s)$ aşağıdaki gibi olmaktadır.

$$G_0^r(s) = \frac{4.55577}{s^3 - 9.2s^2 + 29s - 33.6} e^{-0,2s} \quad (105)$$

$G_0^r(s)$ transfer fonksiyonlarının kutuplarının yeri aşağıdaki gibi bulunabilir.

$$s_{1,2,3} = 2.5 \mp 1.323j, 4.2 \quad (106)$$

Bu durumda istenen bölge dışındaki kutup sayısı bir başka deyişle $G_0^r(s)$ transfer fonksiyonlarının pozitif kutuplarının sayısı, yani $P_{G_0^r} = 3$ olacaktır.

$G_0^r(s)$ transfer fonksiyonuna Direkt metot uygulanacak olursa $\deg(N(s)) < \deg(D(s))$ olmasından dolayı kapalı çevrim sisteminin yeni kökleri sağ yarı düzlemde ortaya çıkar ve sistemde bazı L aralıkları için sağ yarı düzlemde sol yarı düzlemde kutup geçişleri olabilir.

$G_0^r(s)$ için $W(w^2)$ polinomu aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$w^6 + 26.6442w^4 + 222.798w^2 + 1108.48 \quad (107)$$

w 'nin köklerini aşağıdaki gibi bulabiliriz.

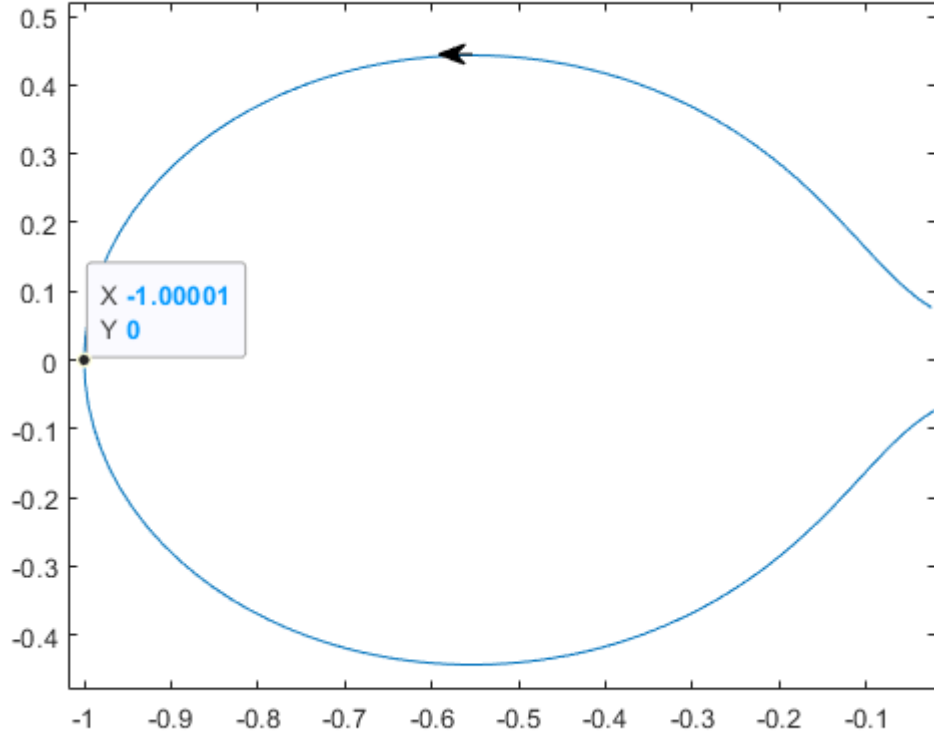
$$w_{1,2,3,4,5,6} = -1.3 \mp 2.5j, 1.30 \mp 2.5j, \mp 4.19j \quad (108)$$

Yukarıdan da görülebileceği üzere w 'nin pozitif gerçel kökü bulunmamaktadır. Bunun anlamı sistemdeki zaman gecikmesi için kutup geçişinin olmadığıdır. $D_{G_0^r} = 0$ olmaktadır. Bu durumda aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$P_{G^r} = P_{G_0^r} + D_{G_0^r} = 3 + 0 = 3 \quad (109)$$

$2-P_{G^r}$ değeri açıkça görüldüğü üzere -1 olmaktadır. Bu da (110) denkleminde $G^r(s)$ için düzenlenmiş Nyquist eğrisinin saat yönünün tersinde bir kez çevrelediği K değerlerini bulmamız gerektiği anlamına gelmektedir.

$$G^r(s) = \frac{-5.32 - 4.9e^{-0.2s} + 3.32s + 2.22e^{-0.2s}s - 0.66s^2}{-33.6 + 4.56e^{-0.2s} + 29s - 9.2s^2 + s^3} \quad (110)$$



Şekil 23. (110) için düzenlenmiş Nyquist eğrisi

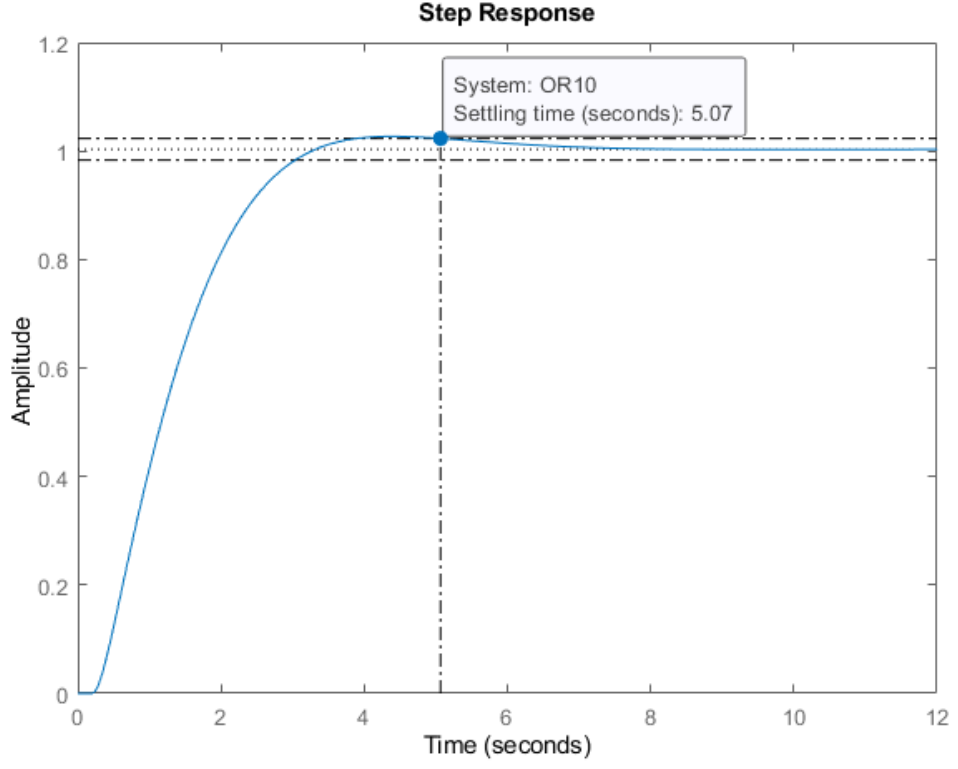
Şekil (23)'te $K = -2.844$ için düzenlenmiş Nyquist eğrisi görülmektedir. $K = (-\infty, -2.844)$ aralığı için düzenlenmiş Nyquist eğrisi -1'i saat yönünün tersinde çevrelemektedir. Bunun anlamı bu K değerleri için kontrolcümüzün baskın kutup yerleşiminin sağlanmasını garantilemesidir.

$K = -7$ seçilip sisteme aşağıdaki oluşan faz ileri kontrolcü uygulanırsa,

$$C(s) = \frac{-7s - 10.56}{s + 4.454} \quad (111)$$

Kapalı çevrim transfer fonksiyonunun karakteristik polinomunu baskın köklerin sıfır yaptığı sağlanmıştır. Yani baskın kutuplar kontrolcü sisteme uygulandığında yerine oturmaktadır.

Sisteme birim basamak uygulayacak olursak aşağıdaki gibi bir cevap verecektir. Kontrolcünün doğasından kaynaklanan kalıcı hal hatası girişe gerekli oranlar uygulanarak giderilmiştir.



Şekil 24. Oluşan faz-ileri kontrolcü uygulandığında Örnek 10'un birim basamak cevabı

Şekil 24'ten de anlaşılacağı üzere şartlar sağlanmış, oturma zamanı 5.07s aşım da %2.4 olarak elde edilmiştir. Baskın kutup hariç diğer kutup beş kattan daha uzağa atılmış ve performans kriterleri de sağlanmıştır.

SONUÇ

Çalışma kapsamında kontrol sistemleri için zaman gecikmesinin doğal sonucu olarak gelen işlem zorluğu açıklanmış ve bu işlem zorluğuna karşı geliştirilen metotlar listelenmiştir. Tez boyunca önce zaman gecikmeli sistemler için kararlılık kriterleri ve yöntemleri incelenmiş, ardından zaman gecikmesiz ve zaman gecikmeli sistemler için baskın kutup yerleşimini sağlayan faz ileri-geri kontrolör parametreleri bulunmuştur.

Kararlılığı sağlayan kontrolörler kümesinin bulunması ve baskın kutup yerleşimini sağlayan parametreler kümesini dayanıklı kontrolör geliştirmek için kabul literatürde kullanılan yöntemlerdir. Bu bağlamda kararlılığı sağlayan oransal kontrolörler incelenmiş aynı zamanda baskın kutup yerleşimini sağlayan düşük mertebeli kontrolör parametreleri bulunmuştur.

Belirli sistem performans kriterlerine göre baskın kutupları atamak için zaman gecikmesiz sistemlerde kök eğrisi yöntemi, zaman gecikmeli sistemlerde ise Nyquist teoremi ve Direkt Metottan faydalanılmıştır. Bu iki yöntem kullanılarak baskın kutup yerleşimini garanti eden kontrolör parametre aralığı bulunmuş, performans kriterleri açısından da tatmin edici sonuçlar elde edilmiştir.

Zaman gecikmeli ve zaman gecikmesiz sistemlerde baskın kutup yerleşiminin faz ileri-geri kontrolörler ile bulunması literatüre katkı sağlamış olup, dayanıklı kontrol geliştirmesi yapmak isteyen okurlara alternatif bir yol olarak sunulmuştur.

KAYNAKLAR

- Abadia, I., Naveros, F., Ros, E., Carrillo, R. R., & Luque, N. R. (2021). A cerebellar-based solution to the nondeterministic time delay problem in robotic control. *Science Robotics*, 6(58).
- Almodaresi, E., & Bozorg, M. (2014). Computing stability domains in the space of time delay and controller coefficients for FOPDT and SOPDT systems. *Journal of Process Control*, 24(12).
- Almodaresi, E., & Bozorg, M. (2015). Kp-stable regions in the space of time delay and PI controller coefficients. *International Journal of Control*, 88(3).
- Arlington, S. Q., Weihs, T. P., & Chen, J. (2020). Environmentally friendly chemical time delays based on interrupted reaction of reactive nanolaminates. *ACS Sustainable Chemistry and Engineering*, 8(46).
- Astrom, K. (1995). 1-0-1-K-J-Astrom-Pid-Controllers-Theory-Design-and-Tuning-2Ed.Pdf. İçinde *Instrument Society of America*.
- Baillieul, J. (2004). Special issue on networked control systems. İçinde *IEEE Transactions on Automatic Control* (C. 49, Issue 9).
- Bergeron, H., Sinclair, L. C., Swann, W. C., Khader, I., Cossel, K. C., Cermak, M., Deschênes, J. D., & Newbury, N. R. (2019). Femtosecond time synchronization of optical clocks off of a flying quadcopter. *Nature Communications*, 10(1).
- Boz, A. F. (1999). *Computational approaches to and comparisons of design methods for linear controllers*. University of Sussex, degree granting institution.
- Bunimovich-Mendrazitsky, S., & Shaikhet, L. (2020). Stability analysis of delayed tumor-antigen-activated immune response in combined bcg and il-2 immunotherapy of bladder cancer. *Processes*, 8(12).
- Chambers, M. L., Pontryagin, L. S., Boltyanskii, V. G., Gamkrelidze, R. v., Mishchenko, E. F., & Brown, D. E. (1965). The Mathematical Theory of Optimal Processes. *OR*, 16(4).

- Culshaw, R. v., Ruan, S., & Webb, G. (2003). A mathematical model of cell-to-cell spread of HIV-1 that includes a time delay. *Journal of Mathematical Biology*, 46(5).
- Das, S., Halder, K., & Gupta, A. (2020). Delay handling method in dominant pole placement based PID controller design. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 16(2).
- Datta, A., & Bhattacharyya, S. P. (2001). Controller design via pade approximation can lead to instability. *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, 5.
- DeConde, R., Kim, P. S., Levy, D., & Lee, P. P. (2005). Post-transplantation dynamics of the immune response to chronic myelogenous leukemia. *Journal of Theoretical Biology*, 236(1).
- Dincel, E., & Söylemez, M. T. (2018). Digital PI-PD controller design for arbitrary order systems: Dominant pole placement approach. *ISA Transactions*, 79.
- Dincel, E., & Söylemez, M. T. (2022). Robust PID controller design via dominant pole assignment for systems with parametric uncertainties. *Asian Journal of Control*, 24(2).
- Dong, C., Yang, S., Jia, H., & Wang, P. (2019). Padé-based stability analysis for a modular multilevel converter considering the time delay in the digital control system. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 66(7).
- Du, H., Hu, X., & Ma, C. (2019). Dominant Pole Placement with Modified PID Controllers. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 17(11).
- Elia, N., & Eisenbeis, J. N. (2011). Limitations of linear control over packet drop networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56(4).
- Elmadssia, S., Saadaoui, K., & Benrejeb, M. (2013). PI Controller Design for Time Delay Systems Using an Extension of the Hermite-Biehler Theorem. *Journal of Industrial Engineering*, 2013.
- Goodwin, G. C., Graebe, S. F., & Salgado, M. E. (2001). *Control system design* (C. 240). Prentice Hall.

- Gori, L., Guerrini, L., & Sodini, M. (2016). A model of economic growth with physical and human capital: The role of time delays. *Chaos*, 26(9).
- Guentri, H., Allaoui, T., Mekki, M., & Denai, M. (2021). POWER management and control of A PHOTOVOLTAIC system with hybrid battery-supercapacitor energy storage BASED ON HEURISTICS METHODS. *Journal of Energy Storage*, 39.
- Guo, J., Liu, C., & Poignet, P. (2019). A Scaled Bilateral Teleoperation System for Robotic-Assisted Surgery with Time Delay. *Journal of Intelligent and Robotic Systems: Theory and Applications*, 95(1).
- Hamdy, M., & Ramadan, A. (2017). Design of Smith Predictor and Fuzzy Decoupling for MIMO Chemical Processes with Time Delays. *Asian Journal of Control*, 19(1).
- Hernández-Pérez, M. A., del Muro-Cuéllar, B., Cortés-Rodríguez, D., & Araujo-Vargas, I. (2013). Stabilization of third-order systems with possible complex conjugate poles and time delay. *Revista Mexicana de Ingeniería Química*, 12(2).
- Hertz, D., Jury, E. I., & Zeheb, E. (1984). Simplified Analytic Stability Test for Systems with Commensurate Time Delays. *IEEE Proceedings D: Control Theory and Applications*, 131(1).
- Ho, M. T., Datta, A., & Bhattacharyya, S. P. (1998). Design of P, PI and PID controllers for interval plants. *Proceedings of the American Control Conference*, 4.
- Hurwitz, A. (1895). On The Conditions Under Which an Equation Has Only Roots With Negative Real Parts. *Mathematische Annalen* (C. 65, Issue 46).
- Jury, E. I., & Paynter, H. M. (1975). Inners and Stability of Dynamic Systems. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 97(2).
- Kartal, Y., Subbarao, K., Gans, N. R., Dogan, A., & Lewis, F. (2020). Distributed backstepping based control of multiple UAV formation flight subject to time delays. *IET Control Theory and Applications*, 14(12).
- Kim, P. S., Lee, P. P., & Levy, D. (2008). Dynamics and potential impact of the immune response to chronic myelogenous leukemia. *PLoS Computational Biology*, 4(6). <https://doi.org/10.1371/journal.pcbi.1000095>

- Klobuchar, J. A. (1987). Ionospheric Time-Delay Algorithm for Single-Frequency GPS Users. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, AES-23(3).
- Lauss, G., & Strunz, K. (2021). Accurate and Stable Hardware-in-the-Loop (HIL) Real-Time Simulation of Integrated Power Electronics and Power Systems. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 36(9).
- Lazarević, M. P. (2006). Finite time stability analysis of PD α fractional control of robotic time-delay systems. *Mechanics Research Communications*, 33(2).
- Lee, S. C., Wang, Q. G., & Xiang, C. (2010). Stabilization of all-pole unstable delay processes by simple controllers. *Journal of Process Control*, 20(2).
- Lu, L. Y., & Cen, Y. G. (2011). Stability analysis of cooperating congestion control algorithm. *Tamkang Journal of Science and Engineering*, 14(3).
- Ma, D., Boussaada, I., Chen, J., Bonnet, C., Niculescu, S. I., & Chen, J. (2022). PID control design for first-order delay systems via MID pole placement: Performance vs. robustness. *Automatica*, 137.
- Mammadov, A. D., Dincel, E., & Söylemez, M. T. (2022). Analytical design of discrete PI-PR controllers via dominant pole assignment. *ISA Transactions*, 123.
- Mandić, P. D., Šekara, T. B., Lazarević, M. P., & Bošković, M. (2017). Dominant pole placement with fractional order PID controllers: D-decomposition approach. *ISA Transactions*, 67.
- Marquez-Rubio, J. F., del Muro-Cuéllar, B., & Álvarez Ramírez, J. (2014). Stabilization region of PD controller for unstable first order process with time delay. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 12(2).
- Márquez-Rubio, J. F., Del-Muro-Cuéllar, B., Velasco-Villa, M., & Novella-Rodríguez, D. F. (2012). Observer-PID stabilization strategy for unstable first-order linear systems with large time delay. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, 51(25).
- Martelli, G. (2009). Stability of PID-controlled second-order time-delay feedback systems. *Automatica*, 45(11).

- Mays, L. O., Farmer, M. J., & Smith, J. E. (1998). A laser diagnostic technique to measure chemical delay time in hypergolic combustion. *Combustion Science and Technology*, 134(1-6).
- Munro, N., Söylemez, M. T., & Baki, H. (1999). Computation of D-stabilizing low-order compensators. *Control Systems Centre Report*.
- Natori, K. (2012). A design method of time-delay systems with communication disturbance observer by using Pade approximation. *International Workshop on Advanced Motion Control, AMC*.
- Nesimioglu, B. S., & Soylemez, M. T. (2012). A simple derivation of all stabilizing proportional controllers for first order time-delay systems. *Asian Journal of Control*, 14(2).
- Nesimioglu, B. S., & Soylemez, M. T. (2016a). All-stabilizing proportional controllers for first-order bi-proper systems with time delay: An analytical derivation. *Asian Journal of Control*, 18(6).
- Nesimioglu, B. S., & Soylemez, M. T. (2016b). All-stabilizing proportional controllers for first-order bi-proper systems with time delay: An analytical derivation. *Asian Journal of Control*, 18(6). <https://doi.org/10.1002/asjc.1316>
- Ngouabo, U. G., Tekougoum Metioguim, E., & Noubissie, S. (2020). Stability and electronic circuit implementation of Lotka–Volterra model with delay. *International Journal of Electronics Letters*, 8(3).
- Nyquist, H. (1932). Regeneration Theory. *Bell System Technical Journal*, 11(1).
- Olgac, N., & Sipahi, R. (2002). An exact method for the stability analysis of time-delayed linear time-invariant (LTI) systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(5).
- Ou, L., Zhang, W., & Gu, D. (2006). Sets of stabilising PID controllers for second-order integrating processes with time delay. *IEE Proceedings: Control Theory and Applications*, 153(5).

- Parada, M., Sbarbaro, D., Borges, R. A., & Peres, P. L. D. (2017). Robust PI and PID design for first- and second-order processes with zeros, time-delay and structured uncertainties. *International Journal of Systems Science*, 48(1).
- Persson, P., & Åström, K. J. (1992). Dominant Pole Design - A Unified View of PID Controller Tuning. *IFAC Proceedings Volumes*, 25(14).
- Pontryagin, L. S. (1955). On the zeros of some elementary transcendental functions. *Çinde American Mathematical Society Translation*, (C. 2, ss. 95-110).
- Quet, P. F., & Özbay, H. (2004). On the design of AQM supporting TCP flows using robust control theory. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49(6).
- Quevedo, D., Silva, E., & Goodwin, G. (2008). Control over unreliable networks affected by packet erasures and variable transmission delays. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 26(4).
- Rekasius, Z. v. (1980). Stability Test for Systems with Delays. *Journal of Environmental Science and Health, Part B: Pesticides, Food Contaminants, and Agricultural Wastes*, 2.
- Routh, E. J. (1877). *A Treatise on the Stability of a Given State of Motion: Particularly Steady Motion*. Macmillan & Co.
- Salinas, L. R., Slawiński, E., & Mut, V. A. (2015). Complete bilateral teleoperation system for a rotorcraft UAV with time-varying delay. *Mathematical Problems in Engineering*, 2015.
- Sawodny, O., Magaña, M. E., & Probst, A. (2010). Using a Kalman filter and a Padé approximation to estimate random time delays in a networked feedback control system. *IET Control Theory & Applications*, 4(11).
- Silva, G. J., Datta, A., & Bhattacharyya, S. P. (2000). Stabilization of time delay systems. *Proceedings of the 2000 American Control Conference. ACC (IEEE Cat. No.00CH36334)*, 963-970 c.2.
- Silva, G. J., Datta, A., & Bhattacharyya, S. P. (2001). PI stabilization of first-order systems with time delay. *Automatica*, 37(12).

- Slawiński, E., Santiago, D., & Mut, V. (2017). Control for delayed bilateral teleoperation of a quadrotor. *ISA Transactions*, 71.
- Solow, R. M. (1956). A contribution to the theory of economic growth. *Quarterly Journal of Economics*, 70(1).
- Söylemez, M. T., Munro, N., & Baki, H. (2003). Fast calculation of stabilizing PID controllers. *Automatica*, 39(1).
- Su, W., & Chen, J. (2013). The mean-square stabilization of networked feedback systems with channel delays. *Chinese Control Conference, CCC*.
- Suva, G. J., Datta, A., & Bhattacharyya, S. P. (2002). New results on the synthesis of PID controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(2).
- Swan, T. W. (1956). ECONOMIC GROWTH and CAPITAL ACCUMULATION. *Economic Record*, 32(2).
- Tan, N. (2003). Computation of stabilizing Lag/Lead controller parameters. *Computers and Electrical Engineering*, 29(8). [https://doi.org/10.1016/S0045-7906\(03\)00012-0](https://doi.org/10.1016/S0045-7906(03)00012-0)
- Thovvsen, A. (1981). The routh-hurwitz method for stability determination of linear differential-difference systems. *International Journal of Control*, 33(5).
- Vielle, B., & Chauvet, G. (1998). Delay equation analysis of human respiratory stability. *Mathematical Biosciences*, 152(2).
- Walton, K., & Marshall, J. E. (1987). Direct Method for TDS Stability Analysis. *IEE Proceedings D: Control Theory and Applications*, 134(2).
- Wang, D. J. (2007). Stabilising regions of PID controllers for nth-order all pole plants with dead-time. *IET Control Theory and Applications*, 1(4).
- Wang, D. J. (2009). Synthesis of PID controllers for integral processes with time delay. *Asian Journal of Control*, 11(5).
- Wang, Q. G., Zhang, Z., Astrom, K. J., & Chek, L. S. (2009). Guaranteed dominant pole placement with PID controllers. *Journal of Process Control*, 19(2).
- Wu, J., & Chen, T. (2007). Design of networked control systems with packet dropouts. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(7).

- Xiang, C., Wang, Q. G., Lu, X., Nguyen, L. A., & Lee, T. H. (2007). Stabilization of second-order unstable delay processes by simple controllers. *Journal of Process Control*, 17(8).
- Zarei, M. (2020). State feedback control of power in a small modular reactor. *Annals of Nuclear Energy*, 147.
- Zhang, T., & Zhang, A. (2020). Robust finite-time tracking control for robotic manipulators with time delay estimation. *Mathematics*, 8(2).
- Zheng, W. X., Feng, C. B., Mirzal, A., Hanta, V., & Procházka, A. (1990). Rational approximation of time delay. *Institute of Chemical Technology in Prague. Department of Computing and Control Engineering. Technicka*, 5(4).
- Zítek, P., Fišer, J., & Vyhlídal, T. (2013). Dimensional analysis approach to dominant three-pole placement in delayed PID control loops. *Journal of Process Control*, 23(8), 1063-1074.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Muhammed Uzman

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi :2018, KTO Karatay Üniversitesi, Mühendislik, Mekatronik

Bildiği Yabancı Diller : İngilizce

İŞ DENEYİMİ

Stajlar :2016, Pınar-İş Makinaları

Çalıştığı Kurumlar :2018, Uzman Mühendis, KTO Karatay Üniversitesi

Tarih: 28 Kasım 2022